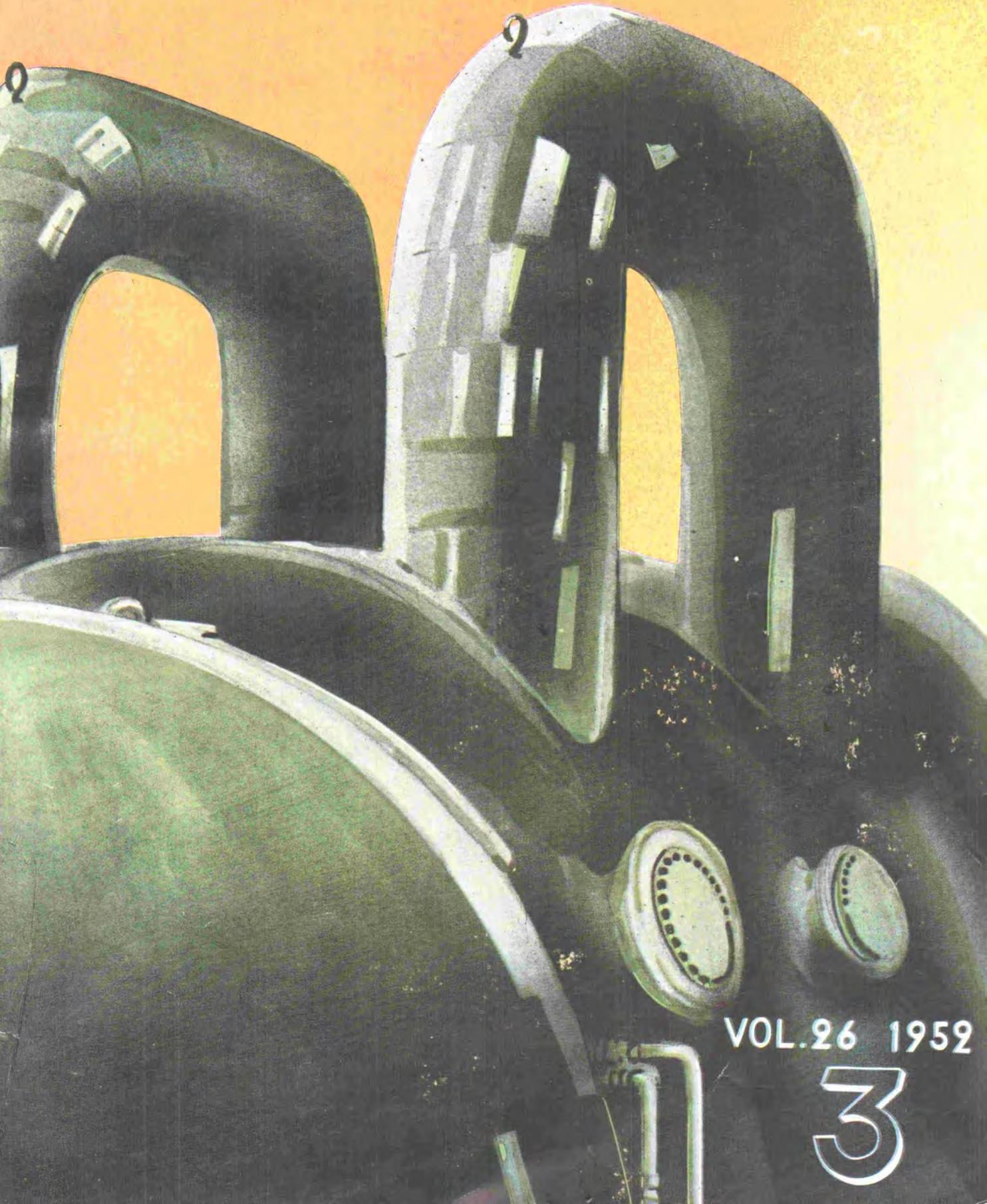


MITSUBISHI DENKI

# 三菱電機



VOL.26 1952

3

# 三菱電機

## 表紙の説明

表紙の Design は築上タービン発電機の偉容を図案化したもので本機の詳細説明は表2にあります。

## 三菱電機株式会社

昭和27年 第26巻 第3号

### 本社

東京都千代田区丸の内(東京ビル)

(電) 和田倉(20) 代表1631・2331

研究所 兵庫県尼崎市南清水

神戸製作所 神戸市兵庫区和田崎町

名古屋製作所 名古屋市東区矢田町

伊丹製作所 兵庫県尼崎市南清水

長崎製作所 長崎市平戸小屋町

大船工場 神奈川県鎌倉市大船

世田谷工場 東京都世田谷区池尻町

郡山工場 福島県郡山市字境橋町

福山工場 福山市沖野上町

姫路工場 兵庫県姫路市千代田町

和歌山工場 和歌山市岡町

中津川工場 岐阜県恵那郡中津町

福岡工場 福岡市今宿青木

札幌修理工場 札幌市北二条東12

大阪営業所 大阪市北区堂島北町8番地1

(電) 福島(45) 5251-9

名古屋営業所 名古屋市中区広小路通

(電) 本局(23) 6231

福岡営業所 福岡市天神町(天神ビル内)

(電) 西(2) 5821-5825

札幌営業所 札幌市南一条西5の14

(電) (2) 3378・3911

仙台事務所 仙台市東一番丁63

(電) 仙台 2573・8057

富山事務所 富山市安住町23の2

(電) 富山 4692・5273

広島事務所 広島市袋町1(明治生命ビル)

(電) 中 1069・4824

## 目次

デンスモータ式衝撃電流記録器……………藤田・森… 2

チューブ式熱板……………鈴木・前田… 7

P.V.F. 銅線を使用した誘導電動機について……………奥田・白田…11

高周波焼入用特殊鋼材の熱処理が

高周波焼入後の硬度(歪)に及ぼす影響……………佐々木…17

円柱型点弧子内部の電位分布および電流密度分布……………菅野・岡田…22

Heaviside 演算子法に対する新しい考察と

その電気回路解析における応用(XIX)……………菅野…28

### 「三菱電機」編集委員会

委員長	岸本久雄	荒井潔	安藤三二	石橋英樹
委員	浅井總次郎	岡屋精二	川田勝利	小林治一郎
	市吉惟浩	澁谷進一	田宮利彦	松田新市
	進藤貞和	前田幸夫	松尾米太郎	松岡治
	每熊秀雄	森前田	薄井廉介	
幹事	宗村平二	木村久男	(以上50音順)	

昭和27年4月30日印刷 昭和27年5月5日発行

『禁無断転載』 定價1部金30円(送料8円)

編集兼発行人	東京千代田区丸の内2丁目3番地	吾柳侃二
印刷所	東京都港区麻布竹谷町1番地	博文堂印刷所
印刷者	東京都港区麻布竹谷町1番地	大橋佑吉
発行所	三菱電機株式会社内	「三菱電機」編集部
	電話 和田倉(20) 1631	日本出版協会会員登録 213013

# デンソメータ式 衝撃電流記録器

研究所 蔭山長三郎  
 伊丹製作所 森 直 次

## 1. まえがき

避雷器の放電電流およびその他の衝撃電流を測定するものとしては、陰極線、オシログラフ、磁鋼片等があるが、ここに紹介するデンソメータ式衝撃電流記録器もこれらとどうように衝撃電流を記録測定するものである。

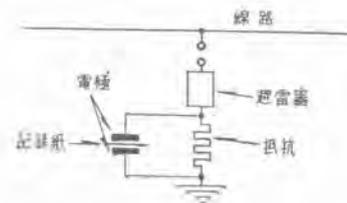
本器の特長は野外においても至極簡便にその目的を達せられることである。これによつて避雷器等の線路保護装置の動作、性能を知ることができ保護装置の活用を一層便ならしめ、その他落雷時の鉄塔電流の測定、実験室における活用等により送配電機器の雷保護に重要な役割をはたすものである。

## 2. 原理、構造および操作

原理的には本器は1図に示すような放電回路に挿入された二つの平板電極の間の薄い紙（記録紙）からなりたつてゐる。これに電極間を通じて電流が流れることにより、破壊または延焼により紙に幾つかの穴があくが、この穴の総面積が通過電流の最高値に比例することを利用したものである。

記録紙および電極は適当なスプリングにより圧せられたマイカルタ環（3図）で保持されており、これがピンでロックされている。記録紙を取り出すときはこのピンを取りはずすことにより容易に取り出される。もし記録紙に穴があいていることが見出されたならば、直ちにこれに日付および場所、番号等を書き込んでおくことが肝要である。一度穴があくとその電流以下のものではなんの徴候もないことがありうるから、記録紙の点検はできるだけ多い方が望ましい。

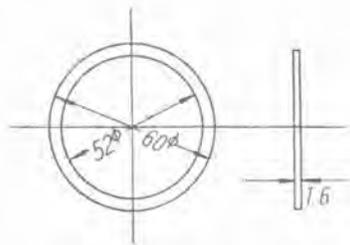
電流の波高値は記録紙の穴の総面積に比例するが、穴の数は1個所の場合もありまた数個所に、あくこともあり、かつその形は不規則であるので、これを幾何学的に測ることは困難である。デンソメータ式ではこの穴の面積を測るのに一定量の空気がこの穴を通ずる時間を測定することにより穴の面積を計測する方法を用いる。この



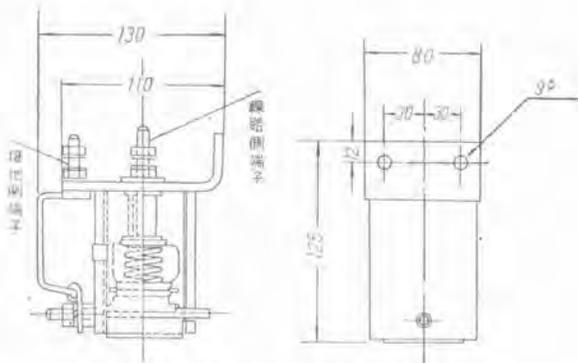
1 図 原 理 図

装置は一つが他の内にはまり込む大小二つの同心円筒から成つており、小さい方の円筒の頂部に記録紙が取り付けられるようになつてゐる。これに記録された紙を取り付け、大きい方の円筒内に落下させる。大きい方の円筒にはパッキンのために水が或るレベルまで入れてある。その落下速度は紙の穴の総面積に比例するからこの時間をストップウォッチで測定し、あらかじめ較正せられた電流波高値対時間曲線により電流の大きさを知るのである。内部円筒にはこの時間を測るために適当な目盛が付いてゐる。これは測定範囲を電流の大小により2種類とするため20 cm 行程と10 cm 行程の二つの目盛がある。電流値が大きく穴が大きいときは20 cm 行程を、電流値が小さく穴の小さいときは10 cm 行程を使用する。較正曲線もこれらの2本の曲線が示されている。

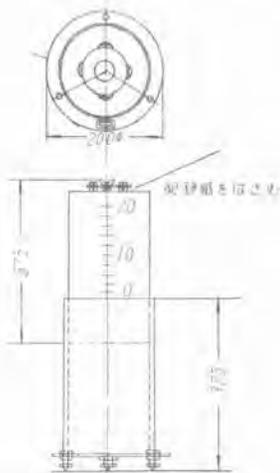
非常に大きい電流の放電では紙は焼け拡がり、または裂ける。このような場合はもはや穴の面積は電流の波高値に比例せず、測定範囲外となる。本器の最大測定電流は約10,000 Aである。しかしそれ以上の電流においても電極に残る弧光跡の大きさにより注意して観察すれば大休の見当は見出しうる。現在までの雷撃測のデータによれば10,000 A以上のものは数%のわずかであるから本器の測定範囲で十分であると考えられる。本式は前記のとおり直接電流を記録する記録紙、これを取付けるPG型衝撃電流記録器および記録紙の穴の大きさを測るSD型衝撃電流測定器から成つてゐる。2, 3, 4 図にこれらの図を示し、5 図に写真を示す。



2 図 記 録 紙



3 図 PG型 衝 撃 電 流 記 録 器



4 図 SD 型 衝 撃 電 流 測 定 器

較正曲線は当所備付の衝撃電流発生装置を用い、この回路常数および充電電圧を加減して種々の電流値における電流波高値対時間曲線を作成した。(6図ないし12図) 500A以下の少電流ではプロットの点のばらつきは、少いが電流が大きくなるにしたがいばらつきも多少大きくなるようである。誤差は大体±20%以内に納まる。

現在の製品の較正曲線は11図と12図で、各部の改良により曲線は直線で表わされるようになった。12図は穴の面積または直径が測りうる場合、電流測定器を用いずに直接この曲線より電流値を出すために作製したもので、現場において穴の大きさを見て大休の電流値を知



5 図 デンソメータ式 衝 撃 電 流 記 録 器

るのに便利である。

野外での使用方法としては主として避雷器の接地線に設置し、避雷器の動作の有無およびその電流値を知るのに用いられる。この場合14図(1)のように3相の個々の接地線に取り付ける方法と、同図(2)のように3相の共通接地線に1個のみ取り付けする方法がある。(2)の方法ではどの相が動作したかはわからない。鉄塔の接地抵抗が高い場合(数100Ωのオーダー)で他に低い接地抵抗が得られるならば15図に示す方法で鉄塔電流を測ることもできる。

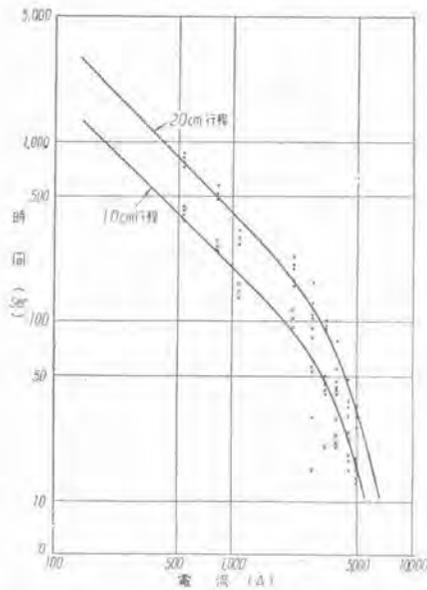
### 3. 実 験

以上の構造、原理に対してデンソメータ式の性能上検討すべき諸要素をつぎのように考え、これらに対して種々の実験を行つた。

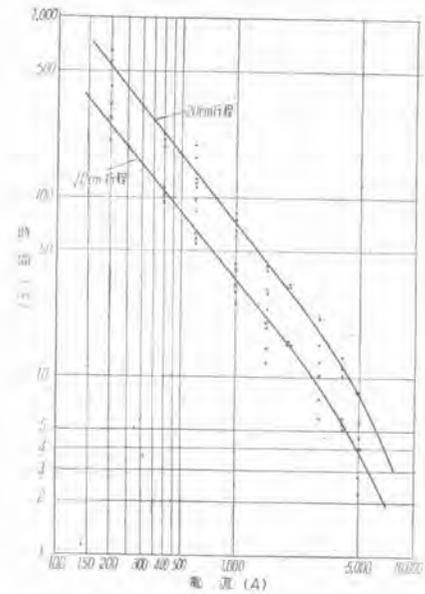
- ア. 紙の種類、厚さ
- イ. 電極の種類
- ウ. 温度の影響
- エ. 記録紙に加わる圧力(スプリングの強さ)の影響
- オ. 電流波形(磁鋼片との比較)
- カ. 記録紙の破壊電圧

#### ア. 紙の種類、厚さ

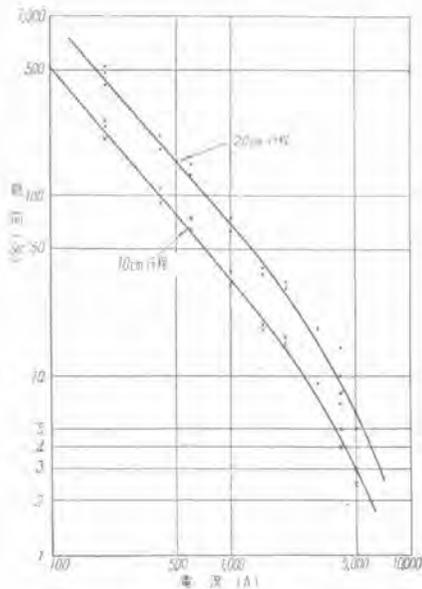
紙はコンデンサペーパー、クラフト紙、フラボードの3種類につき厚さを数種選定して行つた。クラフト紙およびフラボードは厚さの薄いものは得がたく、比較的厚いものしかないで、これらを用いたものは電流の通過により裂け目を生じやすく、同一電流に対する穴の大きさに大きな不同を生じ本記録器には不相当であつた。コンデンサペーパーはもつとも適しているようであり、これの0.025mmおよび0.008mmの2種類について実験を行つた。7図および8図に示すようにこの程度の薄さのものでは両者に差違はなく曲線はほとんど一致している。以下の実験にはこの0.025mmおよび0.008mmのコン



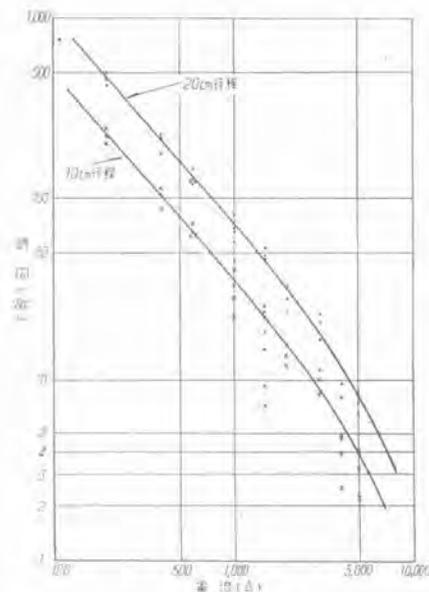
6 図 銅電極 記録紙 0.008mm



8 図 グラファイト電極 記録紙 0.025mm



7 図 グラファイト電極 記録紙 0.008mm



9 図 グラファイト電極 wet 60% 記録紙 0.025mm

デンサペーパーを使用した。現在製品として使用しているのは 0.013mm のものである。

#### イ. 電極の種類

電極は銅およびグラファイトの 2 種類を使用した。両者に電流の少ない (3,000A 以下) 場合はほぼ同一であるが、大電流になると銅の方が表面が荒れやすく、また穴の大きさが急激に大きくなる傾向がある。6 図は銅電極の場合、7 図はグラファイト電極の場合の校正曲線を示す。以上の結果からグラファイト電極は銅電極に優れるようであるが機械的に脆い欠点があるため、本器はもっぱら銅電極を使用している。

#### ウ. 湿度の影響

本器の記録紙はつねに外気に曝されるから、この湿

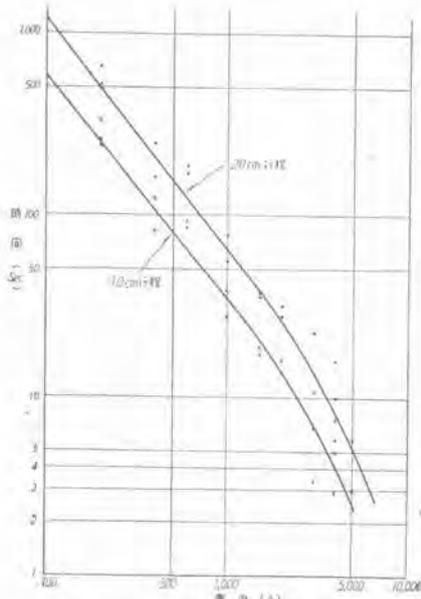
度に対する特性は考慮されなくてはならない。前記の諸校正曲線作製時の湿度は 40~50% であったのに対し、60% および 80% に対する特性をうるため、記録紙を上記湿度の恒温デスケーター内に 24 時間以上密封したものに對して実験を行つた。この場合の校正曲線を 5 図および 6 図に示す。4 図の曲線と比較して両者にあまり相違は認められない。これより記録紙は湿度の影響はほとんど受けないとみてよい。

#### エ. 記録紙に加わる圧力の影響

記録紙を圧しているスプリングの強さを 2, 3kg および 8kg の 2 種類につき同一電流を流して実験したが、この程度の差では両者の間に相違はないようである。

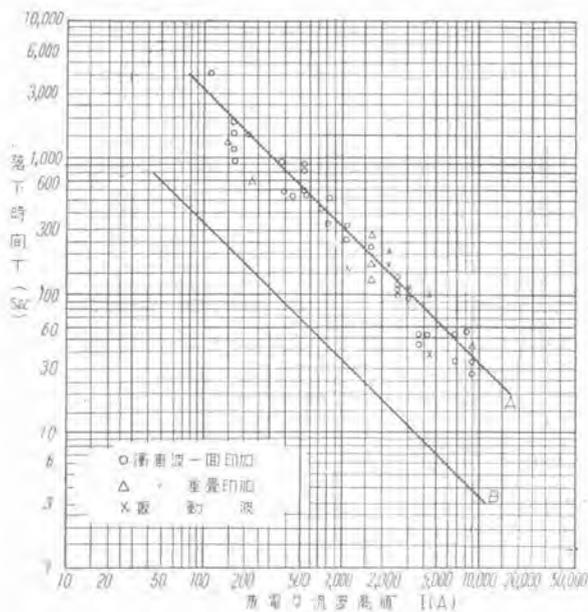
オ. 電流波形および磁鋼片との比較

波形として、① 波頭峻度の急なもの、② 緩かなもの  
③ 振動性のもの、およびこれらの持続時間の長短のものが考えられるが、下記の波形のものに対し実験を行った。デンスメータ式と磁鋼片を比較するために試験回路に直列に磁鋼片を挿入した。デンスメータおよび磁鋼片の校正曲線を得るため、最初 13 図(1)のような平波



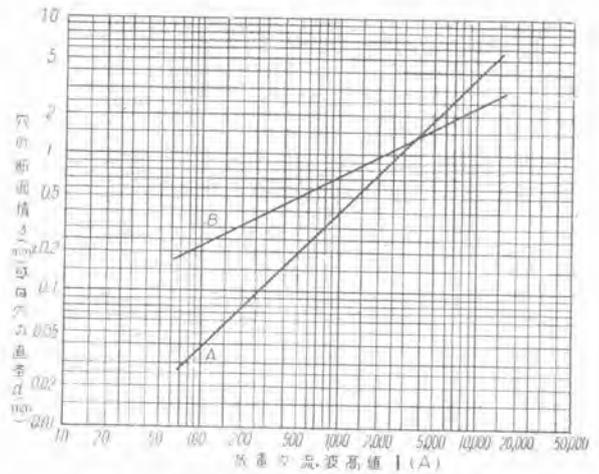
10 図 グラファイト電極  
wet 80% 記録紙 0.025mm

A: 20cm 落時間対放電電流波高値曲線  
B: 2 cm // //

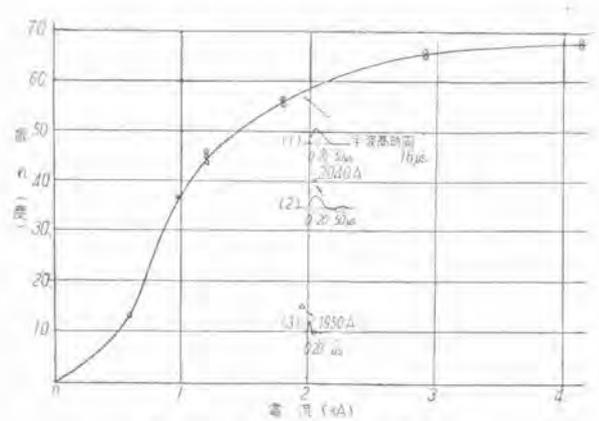


11 図 衝撃電流記録測定装置校正曲線  
(SD 型衝撃電流測定器による)

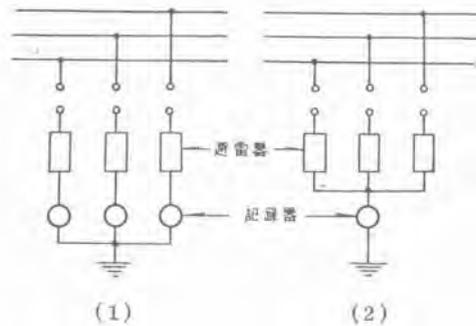
A: 断面積対電流波高値曲線  
B: 直径対電流波高値曲線



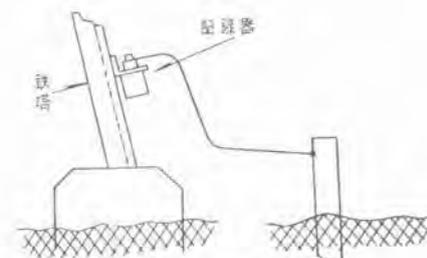
12 図 V-P-G 型衝撃電流記録器校正曲線



13 図 磁鋼片校正曲線



14 図 避雷器放電電流測定



15 図 鉄塔電流測定

高値 16 $\mu$ s 波にて試験をした。このときのデンソメータの較正曲線は前記の 6 図ないし 12 図であり、磁鋼片の較正曲線は 13 図である。つぎに 13 図 (2) あるいは (3) のような振動性の電流にて試験した。デンソメータは上記の較正曲線と変りなく同一であるが、磁鋼片は 13 図の×点あるいは△点となり、電流波形の振動性および波頭峻度により著しく差異を示した。デンソメータにおいても非常に継続時間の長いもの、たとえば 60 $\sim$ の平波においては前述のコンデンサペーパーでの実験結果では 2 $\sim$ 3 倍の大きな穴があくようである。W社のデータによれば適当な紙を使用すればこの場合においても忠実にその波高値を示すことが記されている。また 1 枚の記録紙に重畳印加した場合はその内の一番大きい電流値を示す。以上の実験に用いた磁鋼片は市販の標準品を 1 回巻のコイルにただ、1 個挿入したもので特殊の用い方はしていない。

#### カ. 記録紙の破壊電圧

記録紙は放電回路に直列に入るため、避雷器の放電々流を測定する場合またはその他においても記録紙の破壊電圧が問題となりうる。これが高いときは避雷器の放電開始電圧に影響を及ぼす。本記録器としてはこの点も考慮してできるかぎりその破壊電圧は低いことが望ましい。上述の諸実験に用いた 0.025 mm および 0.008 mm のコンデンサペーパーにつき A. C. および Impulse における破壊電圧試験を行いその最高値を調べた。参考のため

1 表

紙の種類および厚さ (mm)	A.C.破壊電圧 (eff) (V)	Impulse破壊電圧 (V)
A 0.025	800	1580
B 0.013	260	416
C 0.013	500	840
D 0.008	340	630

注. 破壊電圧は A. C. Impulse 共十数回の内の最高値を示す

め 0.013mmのものについても行い 1 表のような値をえた。上記の各厚さの紙は厚さのみでなく紙質も相違しているものである。

A の 0.025mm のものは一番高く約 1.6k V であるがこれが避雷器の放電開始電圧に直接加わるとしても、10 kV の避雷器の放電開始電圧を 45 kV とすると 35% であり、実質的にはあまり影響をあたえない。実際には Impulse に対する直列間隙との電位分布状態によりほとんど影響を及ぼさない。定格電圧の低い避雷器にはより低い紙を使用すればよい。

#### 4. むすび

この装置は一名 Paper gap とも呼ばれ、放電々流の大体の大きさは記録紙をみるだけでただちに知ることができるから現場向きのものとして便利なものである。磁鋼片はこの他に検磁計、減磁線輪、付磁線輪、磁鋼片支え等が必要であり、電流の波高値の外にその極性も知りうるが、振動性のサージや極性の異つた電流が重畳するときはその測定値はかなり不確なものとなる恐れがある。本衝撃電流記録器は整流器等を用いないかぎりサージの極性は知りえないが、振動性サージに対してもつねにその最大電流を指示し、磁気飽和、減磁、磁化の遅れ等がないため広範囲にわたり確実なデータをうることができる。

電流測定器は数個の記録器に対し 1 個あるいは特定の場所に 1 個備えつけておけばよく、電流の大体の値は現場で記録紙の穴の大きさを見るのみで見当をつけることができる。

本器の使用により雷による鉄塔電流あるいは避雷器の放電々流とその頻度を簡単に知ることができ、雷防護に役立つこと多大なりと信ずる。

終りに試料を提供下さつた伊電絶縁課、笹倉班長、つねにご指導を賜つた横須賀課長および実験に協力された森本、長田両技手に感謝の意を表す。

# チューブ式熱板

電気レンジの熱板として、従来の露出型熱板あるいは鋳物埋込型熱板の欠点を除くためチューブ式熱板を開発し、聊かその成果をみるに至つた。本文はチューブ式熱板の概要ならびに特長について説明するとともに当社チューブ式熱板の性能を紹介し、併せてアメリカ製チューブ式熱板との比較を報告したものである。

名古屋製作所  
鈴前 木田 祐雄

## 1. まえがき

家庭用電気レンジは、わが国では従来ほとんど製作されていながつたが、終戦後米軍の進駐に伴い進駐軍の住宅用として大量に発注され、国内の主なるメーカーが競つてこれを受注製作したので、外観性能とも当初に比し著るしく向上した。とくに電気レンジの性能を左右する熱板については、従来の露出型熱板のかわりに鋳物埋込型熱板を製作し好結果を得た。しかしながら鋳物埋込型熱板においては、使用開始時の加熱速度が遅いとか、吸湿して絶縁が低下し易いなどの欠点が避けられなかつた。

アメリカにおいてはこれらの欠点を除くため、電気レンジの熱板としてもつばらチューブ式熱板が採用されている現状である。これは軽量の熱板で、発熱線を絶縁物にて包み、さらに金属管により外気より遮断し完全に保護するようにしたもので、熱容量がきわめて小さなものである。

一方米軍よりも鋳物埋込型熱板の上記欠点を解決するよう研究を勧められたので、当社では昭和23年以来チューブ式熱板の開発に努力し、関係者の苦心の結果、チューブ式熱板の開発に際しもつとも難点とされた高温時の絶縁抵抗に関してもアメリカ製品に比しほとんど遜色のない性能が得られるようになった。

## 2. 構造

1図はチューブ式熱板を取付けた当初CR-6型電気レンジの写真である。

チューブ式熱板の構造は、コイル状の発熱線を金属管の中心に保ち、空隙に耐熱性の絶縁粉末を充填固化したいわゆるアルミカヒータ（当社商品名）を使用し、これを2図に示すように渦巻状に曲げたもの2個を組合せ、容器に接する部分を平らに潰した後、枠や遮断板等を取付け熱板としたものである。当社ではこのチューブ式熱板にアルミカ熱板と命名している。

一般にアルミカヒータにおいて重要な点は、上記絶縁



1 図 CR-6型電気レンジ



2 図 1.2kW チューブ式熱板

層の熱伝導度をよくするというのであつて、熱伝導度を良くさえすれば小型で大容量のものもでき、容量の割合に内部温度も低いから絶縁物の電気的諸性質も良く、電熱線の寿命も長くすることができる。またアルミカヒータの金属管表面温度は定常状態において次式で表わされる。

$$T_m = \frac{P}{S} \times \frac{1}{\lambda} \quad \dots\dots\dots (1)$$

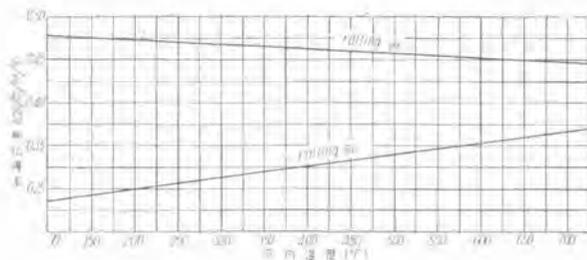
式中  $T_m$  = 最高表面温度上昇 ( $^{\circ}C$ )  
 $S$  = 有効冷却面積 ( $cm^2$ )  
 $P$  = 1 秒間に発生する熱量 (watt)  
 $\lambda$  = 熱の発散率 ( $watt/cm^2 \cdot ^{\circ}C$ )

しかるにチューブ式熱板においては、熱容量を小さくし初期能率を向上する上から軽量にする必要があるので、上式の  $\frac{P}{S}$  (表面負荷率) は余りに小さくすることができない。また空气中で使用するため、水中あるいは油中で使用する場合に比し上式の  $\lambda$  は小であるから表面温度が高くなり、したがって内部温度も高くなるのは免れない。すなわちチューブ式熱板においてはとくに熱伝導が良好でかつ高温において絶縁抵抗の大きな絶縁物を選択する必要がある。かような要求を満たす絶縁物としては酸化マグネシウムが最適であることは周知であるが、純度の高い良質のものの入手が困難な現状で、チューブ式熱板製作の困難はこの一点にあるといつてもよい。

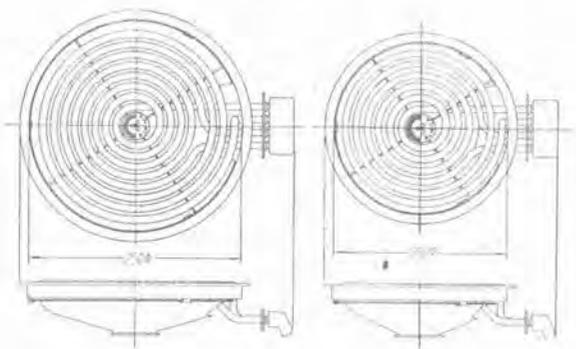
当社では比較的良質の酸化マグネシウムを絶縁物として使用し、voeing 法によつて管径を減じ絶縁粉末を堅固緻密にすることにより、所期の目的を達した。

3 図はチューブ式熱板に使用したアルミカヒータ内における酸化マグネシウムの熱伝導率と温度との関係を実測と計算により求めたものである。

金属管としては管の表面が  $500^{\circ}C$  以上の高温になるためにステンレス管の使用が望ましいが、ニッケル資料の欠乏している現状にかんがみ鋼管を使用することとしカロライジング処理を行うことにより実用上差支えのない程度の耐熱性が得られた。



3 図 マグネシヤの熱伝導率



4 図 チューブ式熱板外形図

### 3. 寸法および表面温度

当社のチューブ式熱板の外形寸法は 4 図に示すとおりで、1.2 kW 熱板は外形 200mm、2 kW 熱板は外形 250mm である。熱板の概要につきアメリカ製チューブ式熱板と比較すると 1 表の如くである。本表によれば、アメリカ製チューブ式熱板は当社のものに比し表面負荷率をかなり大きくとつている。一般に表面負荷率を大きくとれば表面温度が高くなることは第(1)式よりも明らかで、当社 1.2 kW チューブ式熱板につきアルミカヒータの表面負荷率と表面温度との関係は 5 図のとおりである。

表面温度が高くなれば輻射熱を有効に利用することができるので、表面負荷率を大きくとることはチューブ式熱板の特性を發揮する上からも望ましいのであるが、表面温度を高くすることは当然内部温度を高めることになり金属管の耐熱性、絶縁物の高温時における絶縁抵抗および発熱線の寿命等によつて制限せられる。

6 図は前記熱伝導率の絶縁物を使用した場合のチューブ式熱板の表面温度と内部温度の関係を示したものである。

1 表

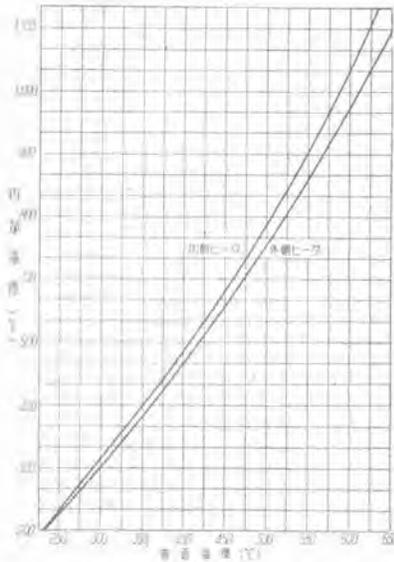
品名	製造方法	熱管外径 (cm)	熱管中径 (cm)	出力 (W)	表面負荷率 ( $W/cm^2$ )	表面温度 ( $^{\circ}C$ )
CALROD 熱板	G.E.C.O.	15	0.7	1100	3.2~4.2	635~700
CHROMALOX 熱板	EDWIN L. WIEGAND CO.	15	0.9	1200	4.4~4.6	748~764
1.2kW ALMICA 熱板	三菱電機	20	0.8	1200	2.4~2.5	520~550
2kW ALMICA 熱板	三菱電機	25	0.8	2000	2.6~3.1	545~610

注、表面負荷率とは発熱部分の金属管の単位表面積当りの容量を表わす



5 図 表面負荷率と表面温度の関係

当社で採用している表面負荷率は、わが国における上記材料の性能を考慮した最大値で、将来材料の研究と相俟つてアメリカ製熱板程度まで表面温度を高くしたいと念願している。



6 図 表面温度と内部温度の関係

#### 4. 特 長

チューブ式熱板は露出型熱板の長所と鋳物埋込型熱板の長所とを併せもち、かつ使用上の不便を除いたもので熱板を軽量にすることによつて定常状態における蓄積熱量を小にし初期能率を高めるとともに、発熱部の表面温度を高くすることによつて輻射による熱移動を増し熱板の平坦度とか容器と熱板の接触度の影響を少くしたものである。すなわちこの種熱板では鋳物埋込型熱板の場合のように特種の容器を選び熱板とできるだけ完全な接触をするというような面倒なことをしなくとも、自由な容器を用い同じような熱効率で使用することができる。また鋳物埋込型熱板と同じく発熱線は完全に絶縁物中に埋込まれているから、局部的に加熱されることがなく、外部からの損傷や酸化の害を受けることもないので、発熱線の寿命は非常に長く耐久力が大である。

チューブ式熱板の特長をはつきりさせるため、露出型熱板ならびに鋳物埋込型熱板とその得失を比較すると2表の如くである。本表に示すように、チューブ式熱板は値段が比較的高くなるのが唯一の欠点であるが、これは寿命が長く性能も優れていることにより十分補われる。

#### 5. 能 率

熱板の能率試験法としては、従来いろいろの方法が唱えられているが、それらのうち比較的合理的と思われるものは、昭和23年2月照明学会内に設けられた小型電熱器能率改善委員会により制定された電気七輪の能率試験規格で、その要点を記すると次の如くである。

チューブ式熱板・鈴木・前田

2 表

熱板の種類 比較項目	2 表		
	露出型熱板	鋳物埋込型熱板	チューブ式熱板
使用開始時の加熱速度が速い	○	×	○
発熱線に人体が触れる恐れがない	×	○	○
絶縁物の吸湿を防止出来る	×	×	○
容器に依る能率の変化が少ない	○	×	○
発熱線の寿命が長く耐久性が大である	×	○	○
掃除しやすい	×	○	○
廉価である	○	×	×

注 ○印は合格、×印は不合格を表わす

3 表

電気七輪の 定格容量(W)	容器の寸法(mm)			水	
	直径	高さ	板厚	水量(g)	水温
1200	220	220	1.0	6,000	室温
2000	280	220	1.5	10,000	〃

#### ア. 容 器

水に入れる容器は黄銅で円筒形に製作し、底面は黒色に塗り、容器の寸法およびこれに入れる水は3表のとおりとする。

#### イ. 能率の種類

能率は初期能率と定常能率の2種とする。初期能率とは室温にある電気七輪、容器および水を用いて求めた能率で、定常能率とは電気七輪に45分間その定格容量に相当する電力を通じて加熱した後、室温にある容器および水を用いて求めた能率である。

#### ウ. 測定方法

水を入れた容器を電気七輪の中央ののせ電気七輪の入力を一定に保ちつつ15分間通電後の水温を読む。

#### エ. 能率の算定方法

試験中の15分間に電気七輪に供給した総電力を $W_1$ ワット時、水に与えた熱量を熱量に換算したものを $W_2$ ワット時、容器による熱損失を電力量に換算したものを $W_3$ ワット時、とすれば、電気七輪の能率は次式により求められる。

$$\text{電気七輪の能率} = \frac{W_2 + W_3}{W_1} \times 100\% \quad (2)$$

上記の能率試験規格により、当社の各種熱板の能率を試験した結果は4表および5表のとおりである。

4表をみると、初期能率において露出型熱板が鋳物埋込型熱板よりかえつて劣る結果となつてはいるが、これは

4 表

供試熱板	初期能率 (%)	定常能率 (%)	平均能率 (%)	熱板重量 (kg)	熱板外径 (mm)
1.2 kW 露出型熱板	58	90	74	1,580	200
鋳物埋込型熱板	61	103	85	3,700	200
チューブ式熱板	77	94	86	0,800	200

5 表

供試熱板	初期能率 (%)	定常能率 (%)	平均能率 (%)	熱板重量 (kg)	熱板外径 (mm)
2 kW 露出型熱板	62	88	75	1,800	200
鋳物埋込型熱板	52	100	76	5,610	250
チューブ式熱板	74	90	82	1,400	250

本能率試験法では水量がとくに多く試験中水温は 25°C 程度にしか上昇しないため、伝導による熱移動を主とする鋳物埋込型熱板では、熱板自体の温度上昇も少く、したがって熱板へ供給する電力が少なくてすみ、輻射による熱移動を主とする露出型熱板に比し能率上昇著しく有利となることに起因する。熱板を実際に使用する場合は水量を少くし湯温を高くするのが普通であるので、通常の使用状態においては鋳物埋込型熱板の能率は 4 表、5 表に示す値よりも小さくなるものと思われる。

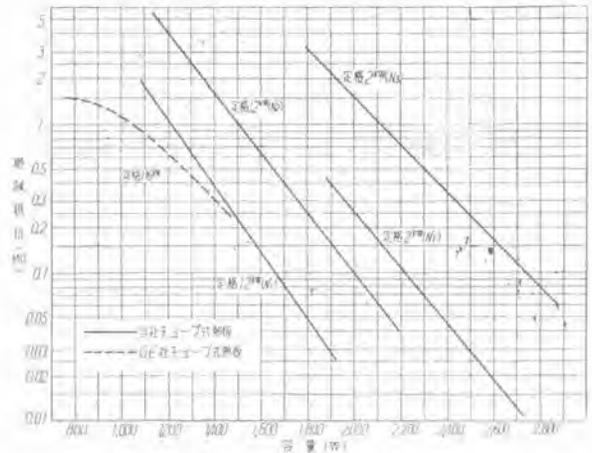
## 6. 絶縁抵抗

電熱器類の絶縁抵抗は、使用前における室温状態の絶縁抵抗と使用中における高温状態の絶縁抵抗の両者について検討する必要がある。室温状態の絶縁抵抗は主として絶縁物の吸湿度によつて影響されるもので、NEMA では熱板を 83~87°F の温度で湿度 85~90% の大気中に 16 時間以上通電せずに放置後、漏洩電流は 1mA 以下に規定されている。

当社の各種熱板を上記温度および湿度で約 20 時間放置後の絶縁抵抗を測定した結果、露出型熱板では 1~2 MΩ、鋳物埋込型熱板では 0.15~0.4 MΩ、チューブ式熱板では 100 MΩ 以上であつた。これは露出型熱板および鋳物埋込型熱板の絶縁物が広い面積で空気と接触しているのに対し、チューブ式熱板ではほとんど完全に空気から遮断されているためで当然の結果である。

つぎに高温状態の絶縁抵抗については絶縁物の高温時の固有抵抗およびその温度上昇により左右されるもので NEMA では熱板に通電中その最高使用温度において漏洩電流 1mA 以下に規定されている。

一般に絶縁物は温度の上昇とともに絶縁抵抗は対数的に急激に減少する特性があるためチューブ式熱板の如く絶縁物の温度が高くなる場合はとくに絶縁物の選択が重要である。また絶縁抵抗を大きくするためにアルミカーヒータ絶縁物の肉厚を大にすることは内部温度を高めかゝつて絶縁抵抗を小さくする結果となる。最も絶縁抵抗が大きくなるアルミカーヒータ絶縁物の肉厚は理論的に算出



7 図 容量と絶縁抵抗の関係

できるが、肉厚の決定に当つては絶縁耐力および工作上の難易も考慮せねばならない。

7 図は当社 1.2 kW および 2 kW チューブ式熱板ならびに G. E 社チューブ式熱板につき、電圧を加減し容量を変化させた場合の絶縁抵抗の変化を示すもので、図中  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  は絶縁物の種類を示し、 $N_2$  は  $N_1$  にある種の元素を加えて結晶化を促進せしめたもの、 $N_3$  はとくに精選せるマグネシヤを使用しベリクレーズ系としたものである。

本図には示されていないが、EDWIN L. WIEGAND 社チューブ式熱板は高温時の絶縁性がとくに優秀であり定格容量において約 3~4 MΩ の絶縁抵抗を有するが、 $N_3$  絶縁物を使用すれば当社のチューブ式熱板も上記熱板に比し大して遜色がない。またいずれの絶縁物を使用した場合も絶縁抵抗の値は NEMA の規格に十分合格する。なお絶縁物としてアルミナを使用せる鋳物埋込型熱板が使用時の絶縁抵抗 0.2~0.3 MΩ なるに比し著るしい進歩といふことができる。

## 7. むすび

チューブ式熱板は露出型熱板および鋳物埋込型熱板の欠点を根本的に解決したもので、上述の試験結果により鋳物埋込型熱板に比し能率および絶縁抵抗が著るしく向上したことが確かめられた。

チューブ式熱板は値段が比較的高くなるため、わが国では高級レンジ用以外にはほとんど使用されていない現状であるが、構造を簡易化するなど原価の低減を計り七輪用などにも普及するようにしたいと思つている。またわが国ではチューブ式熱板の外形寸法が製造会社によつて相異なるため互換性に乏しいがこれも早急に統一する必要があると思う。

将来に残された問題としてはアメリカ製熱板程度まで表面負荷率を大きくとることにより、表面温度を高くし一層能率を良くすることが望れる。そのためにはわれわれも今後とも使用材料の研究を続ける予定であるが材料製造者のご援助とご協力を切望する次第である。

# P. V. F. 銅線を使用した誘導電動機について

名古屋製作所  
奥 田 文 一  
白 田 長 一

## 1. ま え が き

合成樹脂工業の発達に伴い、電気機器の絶縁材料として種々の合成樹脂が出現したが、ポリヴィニール・フォルマール銅線(Polyvinyl・Formal insulated wire 以下 P. V. F. 電線と略称する)は最も早く実用され成果を挙げているものの一つである。アメリカでは戦時中より広く使用され G. E. 社の P. V. F. 銅線はホルメックス(Formex)と称して著名である。日本においても早くから研究していたようであるが、戦後アメリカの技術事情が紹介されると共に、急激に P. V. F. 銅線の研究が促進され、著名電線メーカーは競って試作、研究を開始し漸く昨年始めより相当特性のよい P. V. F. 銅線の量産が可能になつてきた。当社においても、電線メーカーと歩調を合せて P. V. F. 銅線を使用した場合の設計、巻線工作、絶縁処理等の問題について試作、研究を進め P. V. F. 銅線を誘導電動機に使用することの有効性を認めることができたので、その実験結果について報告する。

P. V. F. 銅線を電気機器に使用すると、従来使用していた二重綿巻線(以下 D. C. C. W. と略称す)一重綿巻エナメル線(以下 S. C. C. E. W. と略称す)。

一重絹巻エナメル線(以下 S. S. C. E. W. と略称する)。または紙巻エナメル線(以下 S. M. W. と略称する)に比べて遙かに薄い絶縁皮膜(すなわちエナメル銅線と同等もしくは僅か厚い程度の絶縁皮膜)で数倍の機械的強度と優れた絶縁性を持つているので P. V. F. 樹脂の皮膜の上に綿、絹、紙等の絶縁層を作る必要がない。したがって巻線の占積率が増加し、設計上きわめて有利になる。また工作上でも絶縁材料の節約、絶縁処理の簡略化、絶縁抵抗の向上等、今までに得られなかつた長所を持つている。

われわれは研究の方針として、設計上どの程度有利になるかを検討し、つぎに実際に試作して、巻線工作上絶縁処理等の問題を実験し、種々の条件で実負荷運転を実施、ほぼ結論をうることができた。

今後 P. V. F. 銅線を電気機器に使用することは急速に増加すると予想されるが、この報告がその一助になれば幸である。

## 2. P. V. F. 銅線の概要

P. V. F. 銅線の製造法、ならびに特性についてはす

で電線メーカーより詳しい報告が発表されているから、概略のみに止めたい。まずポリヴィニール・フォルマール樹脂であるが、これはカーバイドから誘導される高分子の合成樹脂である。ポリヴィニール・フォルマール樹脂は電氣的絶縁性に富み、機械的に強靱な皮膜を形成する。この樹脂を電線の絶縁皮膜として使用する場合には普通の油性エナメル銅線におけるエナメルの焼付とほとんど同じ要領で行われる。ただ異なる所は、ポリヴィニール・フォルマール樹脂では重合度の高い程電氣的、機械的特性がよくるのであるが重合度が高いと稀釈性がわるくなり、1回の焼付けでは非常に薄い皮膜を形成できると過ぎないので、油性エナメル銅線に比べて数倍の焼付けを行つているのが現状である。なおポリヴィニール・フォルマール樹脂は前記のようにカーバイドから誘導されるのであるから、入手困難の天然樹脂を使用する油性エナメルに比べ量産も可能であり、原価の低減も期待できよう。

以下簡単に一般的な特性を述べる。

### ア. 絶縁皮膜

最近の規格案によると絶縁皮膜の厚みは、0種と1種とに分れて規定されている。1種と称するのは、油性エナメル線の第一種の皮膜の厚みに相当し、0種と称するのは1種の50%増しのものである。たとえば1.0 m/mの心線径に対して第1種は最小の厚みが0.025 m/mであり、第0種は最小の厚みが0.036 m/mになつている。第0種と第1種は要求される絶縁性によつて選択すべきであらう。所で現在のところ皮膜の厚みは各電線メーカーによつてさまざまであるが、大略0.02~0.05 m/m程度である。前述の如く P. V. F. 銅線の使用の特長は占積率を増加させることにあるのであるからいかに電氣的、機械的に強靱であつても皮膜が程度を越えて厚いことは占積率の増加にならないから、第1種または第1種と第0種との中間位が妥当な所であらう。なおこの皮膜は電氣的にはよい絶縁耐力と絶縁抵抗を持ち、機械的にはエナメル銅線の数十倍、D. C. C. W. の数倍の耐摩耗性を持つている。

### イ. ビンホール

常温で巻付、引伸しをすると非常に微細なビンホールができ、水、アルコールなどに浸されやすいが、巻付、または引伸しをしてから、100~130°Cで3~5分間加

熱処理をすると大体ピンホールは消滅する。電動機巻線として使用する場合には、コイルに成型する時に上述のピンホールができるわけであるが、予備乾燥、絶縁ワックスの乾燥の際加熱するのでピンホールがなくなるものと考えてよいであろう。試作の実例によつてもピンホールのために層間短絡、接地を起したことはない。

### ウ. 耐薬品性

薬品としては絶縁ワックスの稀釈剤に用いられる薬品たとえばベンゼン、ガソリン、アルコールまたはそれらの混合物と化学工業などに使用されて問題になる硫酸、アルカリ等に十分耐えればよいわけである。現在の製品ではガソリン等の炭化水素系のものに対しては十分な強度を持つているが、ベンゼン、アルコールには弱いものがある。しかし油性エナメル銅線に比べては遙かに強く、とくにベンゼンに対しては十分耐えるものが作られるようになってきた。硫酸(比重1.01)、苛性ソーダ(比重1.20)に対して24時間浸漬して置いても皮膜が剥離するようなことは現在の製品ではないようである。ただしこれら薬品に対する耐久性は肉眼または指触のみで判断するのは危険であつて、薬品に浸漬後絶縁耐力を比較して見る

と劣化の程度に甚しい差異がある。したがつて絶縁破壊電圧がある水準(処理前の2/3程度が適当と思われる)に達していればよいとしなければならぬと思つている。

### 1. 機械的強度

機械的性質のうち耐摩耗性は回転式摩耗試験器により各種電線と比較して見ると大体油性エナメル銅線の数十倍、D.C.C.W.の数倍の耐摩耗性がある。また衝撃に対する強さはD.C.C.W., S.C.C.E.W.等に比べて劣るが普通の使用状態においては大きな衝撃力を加えることは考えられないから、機械的には綿または絹の皮膜なしで十分な強度を持つものと考えてよい。ただし今迄に経験したところでは焼付けの温度が高すぎて柔軟性を失い、折り曲げることによつて皮膜に亀裂ができた、または油性エナメルとP.V.F.樹脂とを二層にして焼付けたものでは異質の二層間にて剝離しやすいものがあつたりしていたが、製造工程を安定させることによつてこのような劣化事故はさけうるものと思ふ。

### 2. 耐熱性

P.V.F.樹脂は元来高温用の材料でないから余り高温を期待することは無理であるが、耐熱性の問題は他の

1 表 P.V.F. 銅線試験成績

順序	試験項目	銘柄別	A社	B社	C社	D社	E社	F社	G社	H	備考	
1	外径(mm)		0.88	1.07	0.99	0.85	0.87	0.86	1.05	1.23		
	心径(mm)		0.80	0.98	0.88	0.80	0.80	0.78	0.99	1.07		
	皮膜径(mm)		0.04	0.045	0.055	0.025	0.035	0.04	0.03	0.08		
2	ピンホール試験		0	1	0	4	0	3	82	0	試料3m×5水中	
3	自己径巻付試験		良	良	良	良	良	良	良	良	亀裂の有無	
4	巻付後(9倍径)ピンホール試験		4	0	0	31	6	13	45	1	常温	
5	巻付後(6倍径)ピンホール試験		3	1	0	12	5	6	21	1	120°C	
6	絶縁耐力	常温(V)	6250	4500	4000	2500	3200	3000	3250	3100	2	120°C 本燃り合せ
		浸水(V)	4500	4000	3500	2400	3000	2900	2800	3000	24Hr	
		加熱(V)	4750	4000	3000	2000	3000	2500	2500	2200	120°C	
7	耐酸	外觀	良	良	良	良	良	良	良	良	2	本燃り合せ
		耐圧(V)	2500	3000	4000	200	2500	200	200	1000		
8	耐カアルリ	外觀	良	良	良	良	良	良	良	良	2	本燃り合せ
		耐圧(V)	2750	3250	4000	1375	3000	2500	300	2500		
9	耐ソベール	外觀	良	良	良	良	良	良	良	良	2	本燃り合せ
		耐圧(V)	4000	2250	2150	1250	200	2750	200	2000		
10	耐油	外觀	良	良	良	良	良	良	良	良	2	本燃り合せ
		耐圧(V)	4800	3800	3500	2400	2600	2700	3000	2600		
11	軟化試験		良	良	良	否	良	否	否	良	125°C 96Hr	
12	耐摩耗試験		320	350	380	140	220	280	180	12	荷重200g	

ただし A~G は P.V.F. 銅線 H は S.M. 電線である。

諸性質とも相当な相関関係を有し、また電動機としてはワス処理後の乾燥を考慮してコイルに巻いた状態で、125°Cに保ち96時間を経て軟化や亀裂を起さないようであれば十分と考える。しかし現在の製品にはこの条件に耐えぬものがあり、(a)~(e)の特性の中で現在最も問題になるのは耐熱性をいかに向上させるかという問題であろう。

以上きわめて簡単にP.V.F.銅線の特性の概要を述べたが、これらを裏付ける資料として最近入手した各電線メーカーのP.V.F.銅線の試験の結果を1表にまとめてある。試験方法についてはまだ正式の試験規格がないので、JISのP.V.F.銅線の試験規格案、エナメル銅線の試験規格等を参考とし、筆者が必要と思われる試験項目を加えた。この試験結果によれば各電線メーカー間で相当特性に差異があり、また製造時期によつて甚しく良否の差のあることがある。この原因は使用するP.V.F.樹脂自体の諸問題と焼付温度を初めとする製造工程によるものと考えられるが、これらは互に関連した困難な問題であるが、これらを一日も早く解決して安定した製品の出現を希望するものである。

### 3. P.V.F. 銅線を使用した場合、設計上有利になる諸点

P.V.F.銅線を誘導電動機の巻線材料として使用すると、D.C.C.W., S.C.C.E.W., などに比べて仕上外径が小さくなるから同一の溝に対しては導体の径を太くし、または巻回数を増すことができる。したがつて同一の鉄心量であれば出力が増加する。またこの場合導体の径が大きくなることは一次の抵抗が減少するから一次銅損が減少し効率を向上させることになる。一方出力を現状どおりに止めて置こうとするならば、当然鉄心量を減少することができるわけである。以下これらの事項について考察を加えて見る。

#### ア. P.V.F. 銅線と他種電線との占積率の比較

P.V.F.銅線の絶縁皮膜は第1種エナメル線と同等あるいは僅かに厚い程度でD.C.C.W., S.C.C.E.W. などに比べて遙かに薄い皮膜である導体の仕上外径に対する導体の占積率は非常に増加するわけである。2表はP.V.F.銅線と他の電線における上記の占積率の比較を示してある。1表中aは心線径であつてmmをもつて表わしbは最大仕上外径で単位はmmである。各公称心線径に対して占積率を $a^2/b^2$ の百分率をもつて表わしてある。なおこの表は最も多く使用されているS.C.C.E.W., S.S.C.E.W., S.M.W., との比較である。

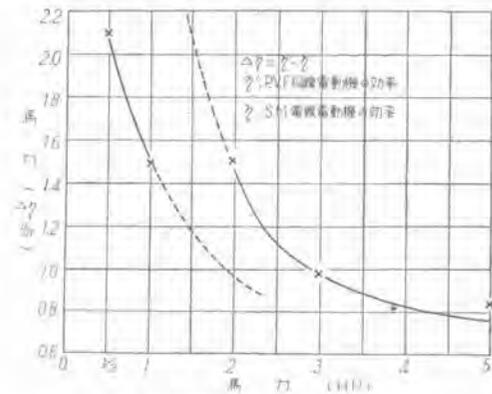
#### イ. 効率の増加。(温度上昇の降下)

2表で明らかなようにP.V.F.銅線の占積率は他の電線に比べて遙かに良好であるので、同一の溝に巻線する時には導体を太くできるので、一次の抵抗の減少により一次銅損が減少するので、効率は増加することにな

2表 P.V.F.銅線と各種電線との占積率の比較表

線径	P.V.F. 線	紙巻エナメル線	一絹エナメル線	第一種エナメル線	一絹エナメル線
(mm)	( $a^2/b^2$ )%				
1.8	88	80.2		89	80.2
1.5	86.8	77.7		88	77.7
1.2	83.8	74.1		87	74.1
1.0	83.3	70.2		84.9	70.2
0.8	80.7	63.3	73.7	81.3	66.3
0.6	78.8	60.2	69.5	82.6	60.2
0.5	78.0	55.2	64.5	80.7	55.2
0.4	77.1	49.4	61.8	78.6	49.4
0.32	72.6	43.3	56.1	76.9	43.3

ただし a=心線径 mm b=最大仕上外径 mm



1図 効率増加率—馬力曲線

る。また導体を太くすることにより電流密度も小になるから温度上昇も下ることになる。以下二、三の実例により説明する。1図にはS.M.W.で設計された電動機にP.V.F.銅線すなわち太い導体を巻いた場合の効率の増加の割合を示した。この曲線で注目したいのは1/2HPから3HP位までの小容量電動機においては相当顕著に効率が增加するが、それ以上の容量のものになると増加の割合が漸減している。このことは2表を見ればわかるように導体の径が大きくなると占積率は大となり、他電線の占積率に比較して増加の割合は減少するので、太い導体を使用するにしたがつて占積率の増加の割合は減少し、効率も小容量のものとは同じような割合では増えて行かないことになる。このことは後述する出力の増加の項、および鉄心量の縮少の項でも同じようにいえることである。

ところでこの曲線では1HPと2HPの間で曲線が二つに分れているが、この理由は1HP以下ではY結線として設計してあり、2HP以上ではW結線として設計したために導体の径が直線的に太くならないためである。点線で示してある曲線は結線を変えず導体の径が直線的に太くなるものと仮想した場合のものである。

### ウ. 出力の増加

前述したように占積率の増加する率は同一の鉄心量を使用したとすると、一次側の抵抗が減少するので最大出力は増加する。2 図は S.M.W. で設計された電動機と比較して最大出力の増加の割合を示した。すなわち S.M.W. を使用した場合の最大出力を  $P_{m1}$ 、P.V.F. 線を使用した場合に得られる最大出力を  $P_{m2}$  として  $\alpha$  の変化率  $\Delta P_m$  をつぎの式で算出した。

$$\Delta P_m = \frac{P_{m2} - P_{m1}}{P_{m1}}$$

最大出力の場合も効率と同じく、電動機の容量が大きくなるにしたがつて最大出力の増加率は減少するがその理由は前述のとおりである。

### エ. 鉄心量の縮小

ウで述べたように同一の鉄心量であれば P.V.F. 銅線を使用すると最大出力を増やすことができるのであるから逆に鉄心量のある程度縮小しても同一量の出力を出しうるわけである。3 図は S.M.W. で設計した電動機と同一の出力をうるためには P.V.F. 銅線ではいか程鉄心量を縮小させるかを実際の設計により求め簡単な曲線で示したものである。すなわち  $l$  を S.M.W. を使用した電動機の鉄心長、 $l'$  はそれと同一の出力を出しうるよう P.V.F. 銅線で設計した電動機の鉄心長、 $\Delta l$  は

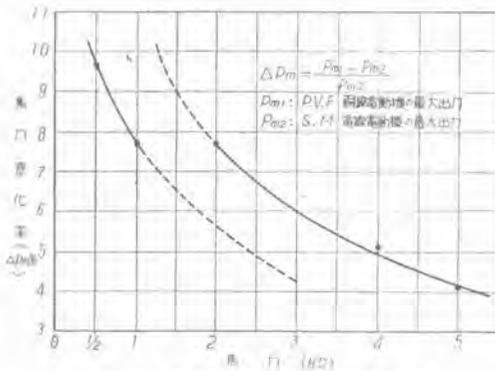
P.V.F. 銅線を使用した場合の鉄心長の縮小率として  $\Delta l$  はつぎの式で算出した。

$$\Delta l = \frac{l - l'}{l}$$

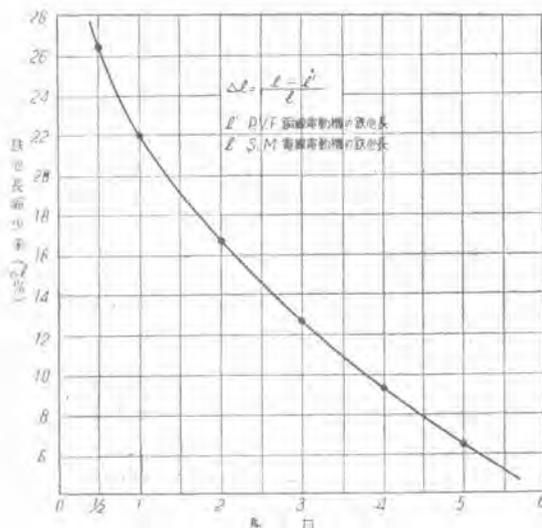
以上述べたように P.V.F. 銅線を使用することにより最大出力を増加し、効率を良好ならしめ、温度上昇を下げあるいは鉄心量を節約することが可能になるわけである。したがって電動機の大いさに制限のある場合とか温度上昇の限度が苦しい場合とか、あるいは高能率を要求される場合などには P.V.F. 銅線はその力を発揮することになる。これら設計上の予想は実際に試作されて予期どおりの結果を得ている。それらの実例を次章に詳述する。

## 4. P.V.F. 銅線を使用した誘導電動機の試作の実例について

3 項で述べたように誘導電動機に P.V.F. 銅線を使用して設計すると、同一の鉄心量であれば最大出力の増加効率の向上を期待でき、一方最大出力を同等にして置くならば鉄心量を縮小できるのである。試作された電動機もこの二方面の要求に応じて製作されているので、それぞれの場合についての実例を示して見よう。3 表は反撈起動単相誘導電動機で試作したもので、特性および最大出力に大きな低下を来さないようにして鉄心量の縮小を意図し、設計されたものである。このものでは S.M.W. を使用した場合鉄心長 70mm であつたものを P.V.F. 銅線を使用して鉄心長を 50mm に縮小している。その特性は 3 表に明らかなように出力も減少せず、効率もほぼ同等である。このような改良は紡織用の電動機



2 図 最大出力—馬力変化率曲線



3 図 鉄心長縮小率—馬力曲線

3 表

仕様	特性波数	周電圧 (V)	無電流 (A)	全負荷特性				最大出力 (%)	停動トルク (%)	起動トルク (%)	起動電流 (A)
				電流 (A)	効率 (%)	力率 (%)	回転数				
S.M.W.線 (鉄心長 70 mm)	50	100	4.85	25.61	56.2	2.14	55	246	278	560	13.9
	60	100	3.56	4.50	66.2	68.0	1768	232	272	50	12.8
P.V.F.線 (鉄心長 50 mm)	50	100	4.68	5.43	62.5	59.0	1462	242	270	473	13.7
	60	100	3.42	4.38	68.5	66.5	1770	228.5	246	408	13.1

鉄心寸法を縮小した実例。反撈起動単相電動機 1/4HP 4P

4 表

仕様	特性波数	周電圧 (V)	無電流 (A)	全負荷特性				最大出力 (%)	停動トルク (%)	起動トルク (%)	起動電流 (%)
				電流 (A)	効率 (%)	力率 (%)	滑り (%)				
S.M.W.線 (鉄心長 8) mm)	50	200	0.93	1.43	75.6	66.8	7.6	173	240	191	4.82
	60	200	0.76	1.27	79.0	71.7	7.4	170	217	147	4.47
P.V.F.線 (鉄心長 70 mm)	50	200	0.97	1.46	75.8	65.4	8.0	178	254	212	4.98
	60	200	0.79	1.33	77.3	70.1	8.6	165	220	167	4.41

鉄心寸法を縮小した実例。織機用開放型三相誘導電動機 1/3 HP 8P

5 表

仕様	特性波数	周波数 (V)	電圧 (V)	無負荷電流 (A)	全負荷特性			最大出力 (%)	停動トルク (%)	起動トルク (%)	起動電流 (A)
					電流 (A)	効力 (%)	率 (%)				
S.M.W. 線	50	200	1.78	3.40	78.8	80.3	6.8	204	324	299	16.9
	60	200	1.42	3.22	79.0	84.7	7.0	190	284	246	15.23
	60	220	1.62	3.05	79.5	80.5	5.8	228	348	305	16.76
P.V.F. 線	50	200	1.39	3.10	82.1	84.4	5.8	229	324	256	17.6
	60	200	1.09	2.98	82.3	88.0	6.1	206	282	217	15.3
	60	220	1.24	2.80	82.6	85.2	5.0	248	345	267.5	16.5
J.E.A. 301			1.40	3.3	79.0	82.5	6.5				

鉄心寸法は同一として、特性の向上を計つた実例。開放型三相誘導電動機 1HP 4P

6 表

仕様	特性波数	周波数 (V)	電圧 (V)	無負荷電流 (A)	全負荷特性			最大出力 (%)	停動トルク (%)	起動トルク (%)	起動電流 (A)
					電流 (A)	効力 (%)	率 (%)				
S.M.W. 線	50	200	1.49	8.88	84.0	86.5	5.3	217.5	296	222	49.7
	60	200	2.65	8.40	87.3	90.0	5.6	196	258	175	44.3
	60	220	2.98	7.76	86.0	87.8	4.2	243	318	216	48.7
P.V.F. 線	50	200	2.96	8.51	85.1	89.0	5.8	225	318	244	50.0
	60	200	2.31	8.31	85.0	91.4	6.0	208	274	191	44.2
	60	220	2.61	7.56	86.6	89.5	4.8	250	338	236	48.6

鉄心寸法は同一として、特性の向上を計つた実例。開放型三相誘導電動機 3HP 4P

ではとくに希望される所で、小型、軽量でかつ高効率であることが要求される場合 P.V.F. 銅線はとくにその力を発揮する。4 表は小型、軽量、を目的としてしかも特性を低下させないように設計されたものである。小型軽量にすることは、鉄心量を縮小することによつて実現し、特性を低下させないためには P.V.F. 銅線を用いたものである。この実例も十分成功したものとえよう。

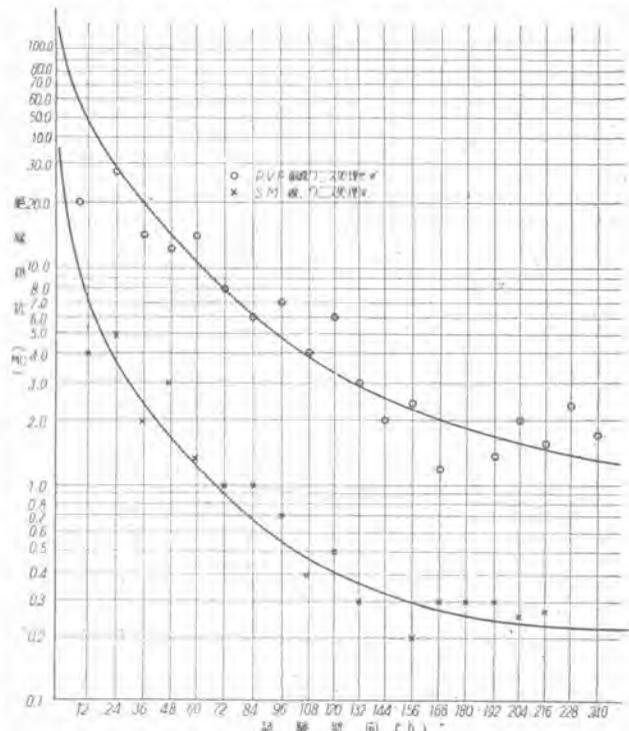
以上二つの試作例はいずれも鉄心量を縮小して電動機の小型、軽量化を目的としたものであるが、つぎに鉄心量は変更せず、最大出力の増加、効率の向上を考へて設計製作したものの実例を示す。まず 1HP, 4P についての試作の実例を 5 表に示す。S.M.W. を使用している電動機では効率、力率、が Q 規格に合格しないが、P.V.F. 銅線を使用した電動機では同一の鉄心量(すなわち電動機の寸法は同一)にもかかわらずすべての特性が Q 規格に合格している 6 表では 3HP 4P について鉄心量は変更せず、効率、力率の向上を計つた実例を示してある。6 表で明らかなように効率は 1% 良好となり、また力率は 2~3% 向上し、さらに最大出力、停動回転力も若干増加している。試作の実例で 1HP と 3HP とを比較して見ると 1 図で明らかなように P.V.F. 銅線を使用した場合の効率の増加は小容量の電動機程大であ

P.V.F. 銅線を使用した誘導電動機について・奥田・白田

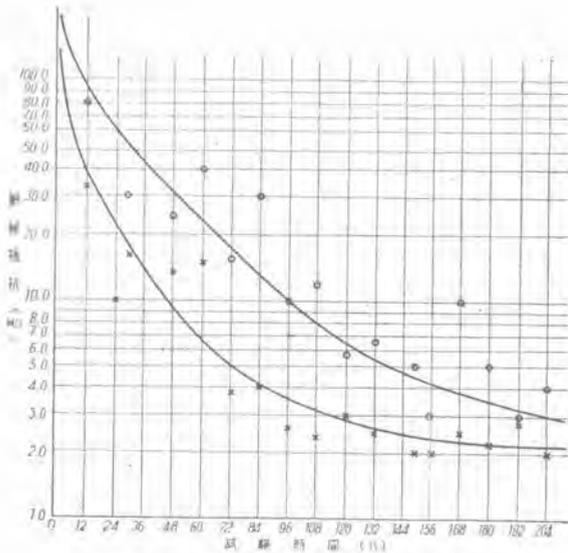
るということが裏書きされている。すなわち 1HP では効率が 3% 増加しているのに対し、3HP では 1% の増加に過ぎない。繰返していえば P.V.F. 銅線を使用することの効果は小容量の電動機程大である。

### 5. P.V.F. 銅線を使用した電動機の絶縁抵抗について

P.V.F. 銅線が優秀な絶縁耐力と絶縁抵抗を持つてゐることは前述したとおりであるが、電動機としての実験においてもそのことが確認された。4 図に示す曲線は P.V.F. 銅線を使用した電動機を相対湿度 90%、室温 40°C の室の中に放置して経過時間に対する絶縁抵抗を測定したものである。比較のために S.M.W. を使用した電動機も同じ室の中で同時に試験したが、両者の耐湿特性曲線を比較して見ると、P.V.F. 銅線は湿度に対して優れた絶縁抵抗を維持できることが立証される。すなわち S.M.W. では 300 時間も経過するとほぼ完全に吸湿して 0.2MΩ 以下になつてしまつてしまうが、P.V.F. 銅線では数 MΩ 以上の絶縁抵抗を維持している。ここで付言して置きたいのは、この実験に用いた P.V.F. 銅線の電動機はワニス処理を省略してあるということである。したがつて P.V.F. 銅線を使用した場合には、ワニス処理を省略しても、ワニス処理を施した S.M.W. に比べて遙かに高い絶縁抵抗を維持しているということである。このことは P.V.F. 銅線を使用する場合には、絶縁処理を簡易化(とくにワニス処理)できる可能性を意味するものである。つぎに 5 図に示す実験は、S.M.W. の場合と全然同一の絶縁要領すなわち、溝絶

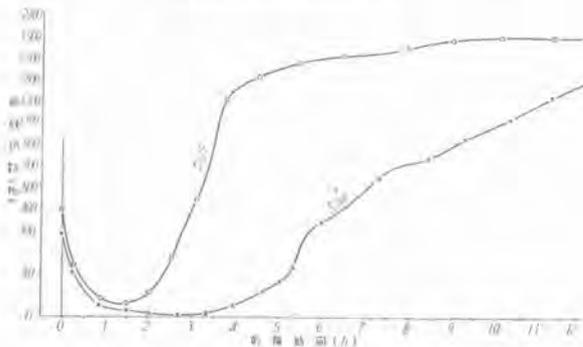


4 図 P.V.F. 銅線を使用した電動機の絶縁抵抗の変化(その 1)  
湿度 90±5% 室温 40±2°C



5 図 P.V.F. 銅線を使用した電動機の絶縁抵抗の変化 (その 2)

湿度  $90 \pm 5\%$  室温  $40 \pm 2^\circ\text{C}$   
 ○=溝絶縁にはフィッシュペーパーとエンパイヤクロスを使用し W25 ワニスをどぶ漬したもの  
 ×=溝絶縁にはフィッシュペーパーのみを使用しどぶ漬処理はせず



6 図 予備乾燥時における絶縁抵抗の変化曲線

線、溝の楔、相間絶縁、ワニス処理等を S.M.W. の場合と同じくして製作された P.V.F. 銅線の電動機と、同じく P.V.F. 銅線を使用して S.M.W. の場合よりも溝絶縁を節約し、ワニス処理も行わない電動機との絶縁抵抗の比較である。この実験ではワニス処理を省略したものは絶縁抵抗は若干低下するが、それでも S.M.W. に比して格段良好であり、適当なコイルの固定法があればワニス処理の省略は可能であるということになる。また溝絶縁についても従来のフィッシュペーパーとエンパイヤクロスのコンビネーションの代りにフィッシュペーパーのみで十分代用できることも示している。このことは絶縁工作上きわめて有利なことであつて、ワニス処理に関してはどぶ漬処理を省略してコイルエンドのみ強靱な皮膜のワニスで固定する方法も考えられる。またどぶ漬の日数を少なくしても十分であるともいえるであろう。以上ワニス処理の場合について考察したが、ワニス処理前の予備乾燥においてもつぎのような傾向が見られる。す

なわち P.V.F. 銅線は吸湿性が少いから予備乾燥時間が相当短縮できる。実験の一例を 6 図に示してあるが、この曲線は P.V.F. 銅線を使用した電動機の固定巻線をワニス処理の前に  $100 \sim 120^\circ\text{C}$  にて予備乾燥した時の絶縁抵抗の変化をとつたものである。この実験によれば S.M.W. を使用した巻線では最高の絶縁抵抗にまで上昇するのに 12 時間を要するに対して、P.V.F. 銅線では同じく最高絶縁抵抗に回復するのに 5~6 時間で十分であることがわかる。したがつて S.M.W. や S.S.C.E.W. などでは予備乾燥に約 20 時間を費しているが、P.V.F. 銅線では約半分の時間で十分である。もちろん周囲の気温、湿度によつて乾燥時間は異つてくるが最悪の条件を除けば前記のことは十分いいうことである。またワニス含浸後の乾燥時間も早い、このことは P.V.F. 皮膜はワニスの付着性が悪いので、ワニスの含浸量が少ないのであるから、乾燥の早いのは当然である。

## 6. P.V.F. 銅線を使用する場合の工作上的問題

工作上的問題としては、コイル入れ作業と絶縁処理に分けて考察する。まずコイル入れ作業においては S.M.W. または S.S.C.E.W. の場合と同じ心線径で同じ巻回数で実施するならば占積率は楽であり、コイルの表面の滑りもよいため作業時間は若干短縮できる。しかし多くの場合 P.V.F. 銅線を S.M.W. などの代りに同じ巻回数だけ使用することはなく、心線を太くするか巻回数を増しているのであるから、作業時間には大した差はなく、むしろ若干増える傾向にある。これに関連して工作上不具合と思われる点は P.V.F. 銅線は他種電線に比べて幾分剛いことである。したがつて巻回数を多くしてコイル入れをする場合には他種電線に比べて幾分困難を感じる。剛くなる原因は P.V.F. 銅線では皮膜の焼付回数が油性エナメル線の 2~3 倍かかるので、巻棒を通過する回数が増え余計に歪をうけて剛くなるものと考えられているが、いずれにせよ巻線作業には支障を来すので早急に解決しなければならぬ問題であると思う。つぎに絶縁処理の問題であるが 5 にて詳述したとおり、絶縁処理は簡易化できる可能性を持つている。すなわち予備乾燥時間を短縮しワニス処理の回数も少くしても大して絶縁抵抗を低下させることにはならない。これらは作業時間ならびに材料の節約に大いに役立つものである。しかしこのことは寿命試験の結果により結論を出したいと思う。ただ従来の電線に対して実施している絶縁処理をそのまま P.V.F. 銅線を実施しても無難ではあるが P.V.F. 銅線に対する独自の絶縁方式、絶縁ワニス研究は今後も続行される筈である。

## 7. むすび

誘導電動機の進歩は一にその材料の進歩にかかっている。P.V.F. 銅線の出現は誘導電動機の水準を向上するのに少なからぬ役割を占めるであろうと思われる。われわれは設計上ならびに工作上から P.V.F. 銅線を考察し、十分期待しうることを示した。しかしまだ工作上では絶縁処理法については完全な結論は得られていないので、今後の研究に、俟たねばならぬと思う。また一方 P.V.F. 銅線としてもメーカーにより特性に差異がありまた量産されると品質の均一性を欠くといつた欠点を一掃できない現状であるので、今後さらに研究を重ね、安定した品質の P.V.F. 銅線の量産を切望するものである。

# 高周波焼入用特殊鋼素材の熱処理が高周波焼入後の硬度(歪)に及ぼす影響

高周波焼入用特殊鋼素材の熱処理が高周波焼入後の硬度(歪)特性に及ぼす影響についての実験と顕微鏡組織よりその理由の釈明を試みた工場実験の報告である。

福岡工場 佐々 静 男

## 1. まえがき

わが国において、機械部品を高周波電流によつて加熱する方式が工業化されたのは近年のことであり、発電方式に比べ比較的発生周波数の高い衝撃火花間隙方式が比較的小さい部品のために実用化されたのは終戦後のことである。当社の鉱山用減速電動機等の機械部品にはこの方式の高周波処理が適用され多大の効果が認められてきた。しかしながらとくに鋼材の高周波焼入に当つて、問題がないとはいえない、よりよき効果を得るためにはよりよき鋼材の選定が非常に重要であることを強調したい。古くは(1)Toccoで、新しくは(2)日本高周波工業株式会社で、高周波焼入鋼として、その化学成分を指定しているのはこの間の事情によるものと考えられるが、その鋼材の高周波焼入前の処理については、内部の機械的強さのみを採りあげて、歯車等においては内部よりも重要だと考えられる高周波急速加熱の影響を受ける歯の部分の強さに関する問題にはふれていない、非常に急速に加熱されるという特殊の条件は、鋼材の化学成分はもちろんのこと加熱前の処理にも注意しなければ満足した結果は得られない。TISG 4105, SCMO 100 (Tocco, SAE 4140) について、高周波焼入前の熱処理が焼入後の硬度(歪)、顕微鏡組織に如何に影響するかを調査したのが本稿である。

(1) 機械学会誌 昭和12年3月

(2) 高周波焼入鋼 日本高周波工業株式会社

## 2. 素材の熱処理による高周波焼入硬度および焼入歪の有意差の検定

(供試材料) TIS 4105 SCMO 100

化学成分(%)

C	S <sub>i</sub>	M <sub>n</sub>	P	S	C <sub>r</sub>	M <sub>o</sub>
0.41	0.30	0.63	0.021	0.013	0.98	0.21

熱処理 焼入, 焼戻

硬 度 36~37 (シヨア)



(試験片の形状)

× 200

1 図 顕微鏡組織

(製作個数)

No. 1. 2. 3. 4. →焼準—920°C—徐冷

No. 5. 6. 7. 8. 9. →焼入, 焼戻

試験片 9 個のうち 4 個 (No. 1~4) を焼準し, 残りの 5 個 (No. 5~9) を焼入焼戻した。この 9 個を同一条件で高周波焼入したとき, 焼入後の硬度, 硬度の分散および変形量を測定した。

ア. 硬度および硬度の分散

(高周波焼入条件) 電圧 3,200V 電力(入力)90kW  
加熱時間 9sec

(高周波焼入硬度)  $R_0$  測定換算シヨア値を示す。

(分散の検定)

No. 1~4 までを A ブロック No. 5~9 を B ブロックと分けて不偏分散比を計算すると

$$v_A^2 = 3.34 (f=19) \quad v_B^2 = 0.39 (f=22)$$

$$F_0 = \frac{v_A^2}{v_B^2} = 8.57 \quad F_{19,22}(\alpha=0.01) = 2.92$$

ゆえに分散に有意差がある。

(平均値の差)

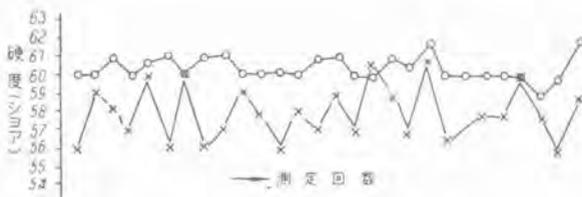
1 表の高周波焼入後の硬度を 2 図に示した。平均値も差があると考えられる。

以上の結果, 素材を焼入焼戻したものは焼準したものに比較して焼入後の硬度ムラ(分散)は小さく, 硬度は高い。

(寸法測定)

1 表

No.	素材硬直	焼準硬直	高周波焼入硬直
1	37 37 35 37 38 36	29 30 30 32 31 31 29	56 60 56 57 59 58
2	37 36 36 37 37 36	31 31 30 28 29 30 32	56 58 57 59 57 60.5
3	37.5 36 36 37 37 36	28 27 29 28 29 29 30 29 29	59 57 61 55.5 54
4	36 37 36 36 37 37 36	28 33 33 31 31 30 30 29	58 58 60 58 56 59
5	35 37 37 37 36 35 38		60 60 61 60 60.5 61 61
6	36 37 37 36 37 37 37		60 61 60 60 60
7	37 37 36 37 36 36 37		60 61 61 60 61
8	37 37.5 37.5 37 36 36		60.5 62 60 60 60
9	36 37 37 36 36 37 37		60 60 59 60 61



(○)焼入, 焼準 ×焼準

2 図

イ・変形量

測定は微測マイクロメータをブロックゲージにてセットして測定した。

2 表

No.	機工後	焼準後	高周波焼入後	変形量
1	35φ +0.047	35φ +0.002	35φ +0.022	0.020
2	// +0.035	// +0.010	// +0.024	0.014
3	// +0.044	// +0.009	// +0.026	0.017
4	// +0.028	// -0.014	// +0.008	0.022
5	// +0.047		// +0.076	0.029
6	// +0.034		// +0.057	0.023
7	// +0.046		// +0.080	0.034
8	// ±0		// +0.018	0.018
9	// +0.037		// +0.077	0.040

(分散の検定)

No. 1~4をA No. 5~9をBとすると

$$v_A^2 = 12.25 (f=3) \quad v_B^2 = 75.7 (f=4)$$

$$F_0 = \frac{v_B^2}{v_A^2} = 6.18 \quad F_{\alpha}^4 (\alpha=0.05) = 9.12$$

ゆえに歪の分散は両者に有意差があるとはいえない。

(平均値の差)

A, B両者の平均値の差を  $t$  分布表により検定する  
(ブロックA, Bの平均値) -  $(\bar{x}_A = 18.25) (\bar{x}_B = 28.80)$

$$\text{和} \left( \frac{S_A = 36.75}{S_B = 302.80} \right) \left( \begin{matrix} \text{標本数} \\ m=4 \\ n=5 \end{matrix} \right)$$

$$t = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{\sqrt{\frac{S_A + S_B}{m+n-2} \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right)}} = 2.26 \quad \begin{matrix} t_{0.05} = 2.365 \\ t_{0.1} = 1.895 \end{matrix}$$

ゆえに 10% の危険率で平均値には有意差ありといえる。

しかしながら変形量については、標本数が少ないために明確な結論は下し得ない。3 図には 2 表の変形量を示した。

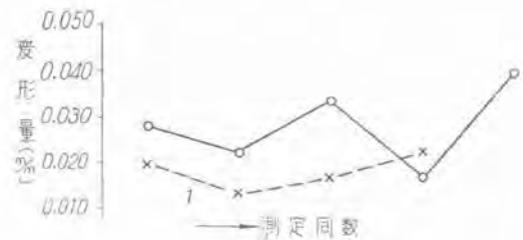
3. 焼入焼戻した素材硬度と高周波焼入硬度の相関関係

4 図に示す試験片を作りこれを高周波にて焼入し、焼入前の硬度と焼入後の硬度の関係を分析した。

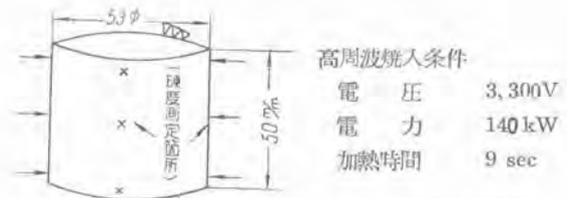
焼入後の硬度測定は同一個所を測定できないので、焼入前の測定孔をわずかに逃げて測定した。

(測定  $R_c$ )

5 図に硬度の測定結果を示した。硬度は換算ショア値を示す。これをグラフにプロットすると 6 図のようになった。



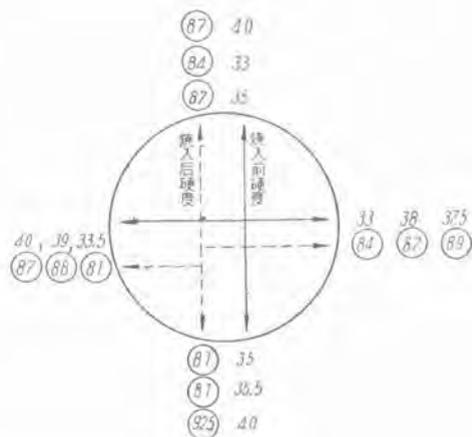
3 図



高周波焼入条件

- 電圧 3,300V
- 電力 140kW
- 加熱時間 9 sec

4 図



5 図

3章に述べた実験結果をまとめて3表に記入した。

3 表

特性	焼入硬度	硬度ムラ	焼入歪	備 考
素材焼入	(大)	(小)	大	焼戻硬度大なる程硬度大
焼 準	小	大	(小)	

高周波焼入歯車としては焼入硬度大でムラも少なく焼入歪も少いことが望ましいが、3表から硬度と歪の特性は両立しないことが判つた。焼入歪の差については素材熱処理による内部応力の差だと考えた。さてここで以上の実験よりつぎの新しい実験課目が与えられたことに注意しなければならない。すなわち1表において焼準したNo. 1~4の試料について硬度の分散の変化をしらべる。1表の素材硬度 No. 1~No. 4までをAブロック、焼準硬度 No. 1~No. 4までをBブロックと分けて不偏分散比を計算すると

$$v_A^2 = 0.513 (f=21) \quad v_B^2 = 2.65 (f=30)$$

$$F_0 = \frac{v_B^2}{v_A^2} = \frac{2.65}{0.513} = 5.15 \quad F_{21,30}(\alpha=0.01) = 2.72$$

ゆえに硬度の分散は焼準により大きくなることがいえる。また焼入前硬度と焼入後硬度の関係をしらべると

焼準後硬度平均	焼入後硬度平均	
30.06	58.0	(No. 1~4)
素材硬度平均	焼入後硬度平均	(No. 5~9)
36.60	60.40	

以上のことを考察すると(1)焼入焼戻をした試料と同程度の硬度の分散を焼準により得た場合(2)焼入焼戻した試料と同程度の硬度を焼準により得た場合焼入後の特性は同程度になり得ないかということが考えられる。ただしこの場合は、硬度の特性のみについてであつて他のすべての特性が同一になると考えられない。

#### 4. 高周波焼入歯車の顕微鏡組織

(供 試 品)

材 料 2章に使用せるものと同材

個 数 2 (No. 1~No. 2)

熱処理 No. 1 (焼準) 920°C 空冷

No. 2 (焼入焼戻)

850°C 1/2h 水冷 焼入硬度  $\bar{x}$  84 (シヨア)

750°C 1h 油冷 焼戻硬度  $\bar{x}$  38 (シヨア)

(試 験 方 法)

同一条件で2個を高周波焼入し、焼入後7図に示すように冷却しながらグラインダで切断し、その切断面の硬度分布および顕微鏡組織を撮影した。

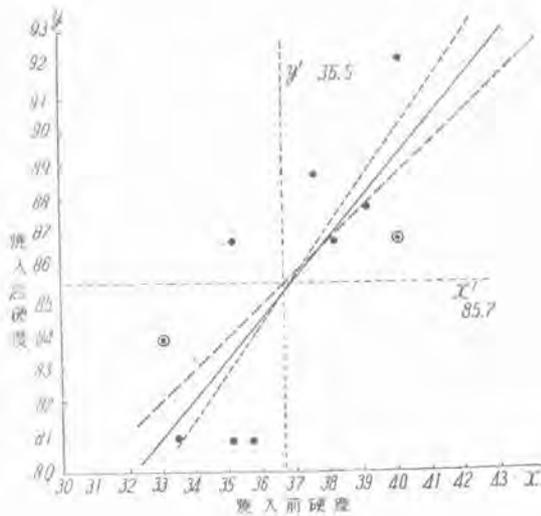
歯 型 フェロースタッド

D, P 6/8

歯 数 13

稔れ角度 12°50' 左

(高周波焼入条件) 電圧 3,000V 電力 110kW 加熱時間 8秒



6 図

図を見ると焼入前の硬度が高い程焼入後の硬度も高いように見えるが、測定値がばらついているので良く判らない。ゆえに相関係数  $r$  を計算してこの二者の相関を分析した。図において  $x, y$  の平均値に原点を移して  $x', y'$  を引くと、測定点のほとんどが第1第3象限にあり他は第4象限に1点あることが判つた。ゆえに相関の程度が高いことが判るが、なお相関の有無を明らかにするために相関係数  $r$  を求めた。

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x'^2}{N} - \bar{x}'^2} = \sqrt{\frac{88292.25}{12} - (85.7)^2} = 3.63$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y'^2}{N} - \bar{y}'^2} = \sqrt{\frac{16181.75}{12} - (36.6)^2} = 2.98$$

$$P = \frac{\sum x'y'}{N} - \bar{x}'\bar{y}' = 3145.7 - 85.7 \times 36.6 = 9.08$$

$$r = \frac{P}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{9.08}{3.63 \times 2.98} = 0.84$$

自由度  $f=10$  において  $r(\alpha=0.001) = 0.8233$

ゆえに両者には相関関係があることが判つたが、なお直線性の関係があると仮定して回帰線を求めた

$x$  に対する  $y$  の回帰直線

$$y - \bar{y} = r \frac{\partial y}{\partial x} (x - \bar{x}) \quad y = 1.02x + 48.37$$

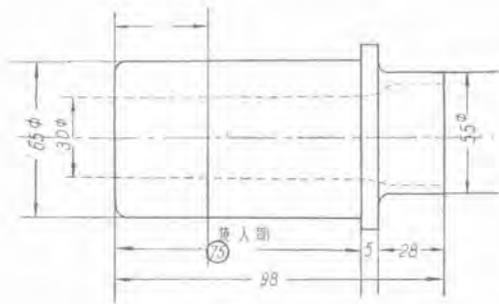
$$\begin{cases} y=81 & x=31.99 \\ y=93 & x=43.75 \end{cases}$$

$y$  に対する  $x$  の回帰直線

$$x - \bar{x} = r \frac{\partial x}{\partial y} (y - \bar{y}) \quad x = 0.69y - 22.53$$

$$\begin{cases} x=34 & y=87.9 \\ x=40 & y=90.6 \end{cases}$$

ただしこの場合両者の硬度測定誤差は同程度だと考えて二つの回帰直線の2等分線を求めこれを6図に記入した。以上分析の結果素材を焼入焼戻した場合、その焼戻後の硬度は焼入後の硬度と6図に示すように焼戻後の硬度は高い程焼入後の硬度も高いことが判つた。以上2章

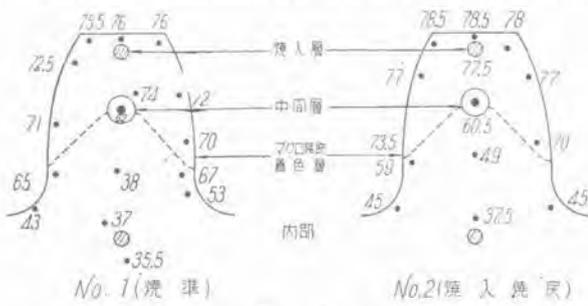


7 図

(歯部の硬度分布)

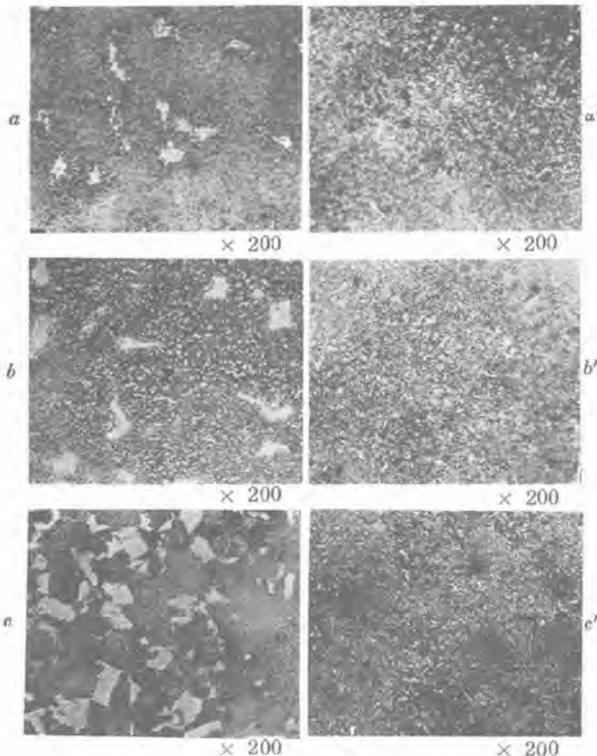
8 図にこれを示す。硬度はビッカースで測定し、換算ショア値を示した。

4 表に各層の組織を示した。組織的にも明らかに素材



8 図

(顕微鏡組織)

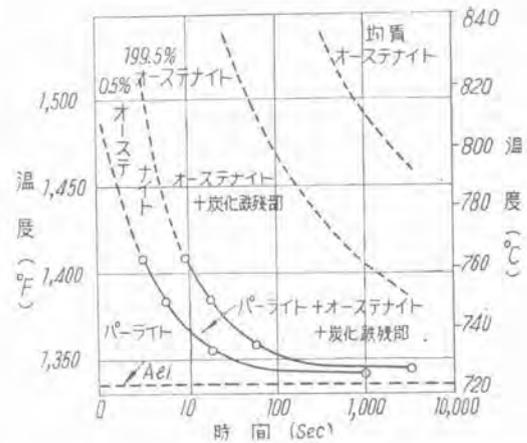


4 表

処理	組織			粒子
	焼入層	中間層	内部	
焼準	※ マルテンサイト +フェライト	マルテンサイト +フェライト+ その他	フェライト+ パーライト	大
焼入焼戻	△ マルテンサイト	同 上	ソルバイト	小

処理の違った両者には差がある。とくに※組織は高周波急速加熱特有の特異な組織である。△組織は撮影できなかったが 1,500 倍に拡大して見ても針状組織ではなかつた。

鋼材を焼入するために焼入温度に急速に加熱することは、一般の焼入処理の概念に全く相反している。9 図にパーライト共晶鋼のオーステナイト化に必要な温度と時間を示した。すなわち均質なオーステナイトを得るためには十分な焼入温度の保持時間が必要であることを示している。極度に短時間で加熱冷却しても本質的に焼入硬化は得られない。10 図に SAE 4340 鋼 (C 0.43,  $M_n$  0.66,  $N_i$  1.80,  $C_r$  0.70,  $M_o$  0.26) の焼入前の組織を種々選

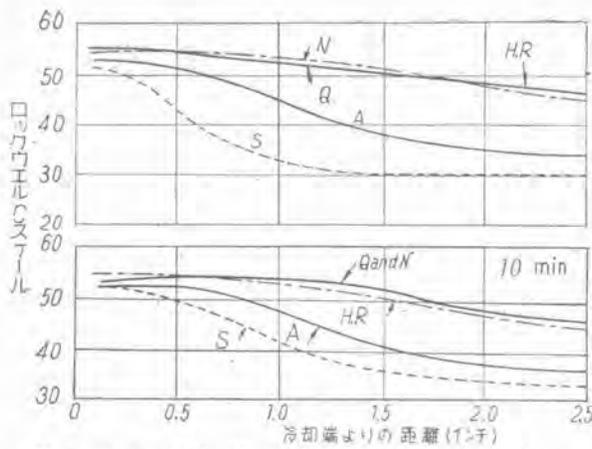


9 図

Roberts, G. A., and R. F. Mehl.  
Trans. Am. Soc. Metals, V. 31, 1943

定したときの Jominy Test の結果を示す。すなわち焼入前の組織 (結晶粒子の大きさ) が 9 図に示したオーステナイトへの変態にいかに関与するかが判る。さて顕微鏡写真 a, b, c (焼準組織よりの高周波焼入) について考察すると、この歯車の加熱時間は 8 秒である。しかも  $A_3$  変態点以上に加熱された時間は温度の上昇時間を考えると 8 秒以下である。

このように焼入時間が短かいと上述したように各元素がオーステナイトへ固溶する時間が与えられないことになる。したがって比較的高い焼入温度を与えるけれども写真 a に示すようになおパーライトに比べてもつとも遅くオーステナイトへ固溶するフェライトが焼入後の組織にそのまま残ることが考えられる。焼入焼戻組織より高周波焼入した場合 (顕微鏡写真 a', b', c') については焼入前の組織は c' に示すようにソルバイト組織になっている。この組織の主体は焼準組織と同じようにフェライト・炭化鉄・その他の化合物よりなっているがこのソルバイト組織を得るためには普通の熱処理法によつて焼入されずなわち完全なオーステナイト相より焼入し、これを焼戻したものであるからフェライト・炭化鉄・その他の形状が細くそして焼準組織のそれと違うのはもちろんであるが、機械的性質も遙かに強靱なものとなつて

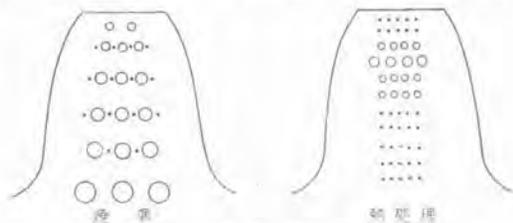


H.R=hot rolled N=normalized A=annealed  
S=spheroidized Q=quenched  
Wellauer E.J  
Iron Age, V.158, 1946. Sep.5, pp.62-66.

10 図

いる。すなわち炭化鉄その他化合物の粒子およびその分布がその組織の物理的性質を決定している。さてこのソルバイト組織は焼準組織より遙かに早くオーステナイトへ拡散し易く、完全に拡散しないとしても大きい粒状フェライトがそのままマルテンサイト組織内に残るとは考えられない。写真 a' はこれを示し一般に微粒マルテンサイトといわれている。また一般の鋼材を必要以上の高温でその加熱時間を長くすればオーステナイト粒子が粗大化し機械的性質とくに靱性に悪影響を及ぼすことが知られている。しかしながら高周波焼入で適当な温度で短時間に焼入すると、このオーステナイト粒子の成長を防ぎ微粒マルテンサイトが得られると考えられる。b' には中間層の組織を示したが中間層には割合大きなフェライト粒子の存していることが判つた。このことは歯車の歯部の高周波加熱時の温度分布を考えると最表面の温度はもつとも高くオーステナイト固溶体を得る温度に達しているが、内部になるにしたがつて温度は低くなっている。簡単のために鉄-炭素二元状態図についていえば  $\alpha + \gamma$  相に相当する部分が当然である筈である。この部分が中間相である。すなわち GS 線に沿つて  $\gamma$  に固溶してゆく過程から冷却されたのであるからマルテンサイトとフェライトの混合した組織となる。A<sub>1</sub> 変態点以下に加熱される部分は本質的には何等変化なく、変態温度付近に相当している部分は変態点を境にした両相の混合組織になることが考えられる。11図に歯部内のフェライト粒子の変化を示した。

以上はクロームモリブデン鋼についてであるが焼準組



11 図

織の材料を高周波焼入すると硬いマルテンサイトの焼入層の内に軟かいフェライトの粒子が残留するという特異性はニッケルクローム鋼、炭素鋼についても同様であることを確めた。

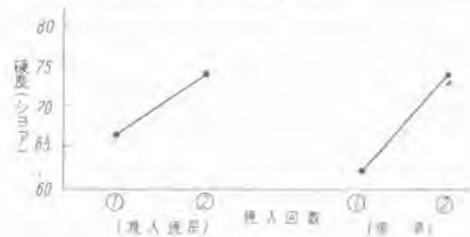
### 5. 顕微鏡組織と焼入硬度の関係

2章3章に実験した素材の処理と焼入硬度の関係が顕微鏡組織の調査によつて一層明らかなものとなつた。

特性	硬度	ムラ	理 由
焼入焼戻	大	小	組織が微粒マルテンサイトと大きいフェライト粒子が存在しない
焼 準	小	大	組織中に軟かいフェライト粒子を含み形状も均一でない

一般に高周波焼入を繰返えすと硬度が上昇することが知られている。12図にクロームモリブデン鋼についての実験結果を示した。焼入回数を増せば焼入時間も必然的に長くなると考えればマルテンサイト内のフェライト粒子は減少しそのための硬度上昇だと考えている。

### 6. 繰返し高周波焼入と硬度組織の関係



12 図

### 7. むすび

以上の結果をまとめる。

(1)

性特	硬度		焼入		組 織	價 格
	硬度	焼入	ムラ	歪		
処理						
焼 入 焼 戻	大	小	大	歪	良	高
焼 準	小	大	小	歪	不良	安

焼入組織の物理的性質については、実験していないが (3) Walter Crafts and John L. Lamont はつぎのようにいつている。低炭素鋼でフェライトが完全に溶解しないと焼きが入り難くしかも脆性や割れ (歪) を生ずる傾向がある。

(2)

素材の焼入焼戻硬度は高いほど焼入硬度は高い。

(3)

顕微鏡組織的にはフェライトの量および形状が硬度その他の特性に影響している。

(4)

繰返えし高周波焼入による硬度の上昇はフェライトの残留量が減少することによる。

本稿の主目的である素材の熱処理 (焼入焼戻および焼準) と焼入硬度との関係は明らかにし得たと思う。高周波焼入用鋼材としては、その化学組成および焼入前の熱処理がとくに重要であることを再び強調したい。金属顕微鏡は九州大学冶金教室のものを使用させて頂いた。種々の助言を頂いた九州大学松田助教授に深く感謝する次第である。

(3) Hardenability and Steel Selection Walter Crafts and John L. Lamont

# 円柱型点弧子内部の電位分布および電流密度分布

円柱型点弧子を水銀溜に一部挿入して、これに電圧を印加したときの点弧子内部の電位分布および水銀面以下における点弧子表面の電流密度、水銀面以上における点弧子表面の電界強度を計算し、さきに J. Slepian および L. R. Ludwig が平行平板状の点弧子について論じた結果と比較した。

菅野正雄  
岡田武夫  
研 究 所

## 1. ま え が き

J. Slepian および L. R. Ludwig<sup>(1)</sup>は厚さ  $d$  なる無限大平行平板状 ( $-\infty < x < \infty, -\frac{d}{2} < y < \frac{d}{2}, -\infty < z < \infty$ ) の点弧子を水銀溜に挿入して、これに  $z$  方向で電圧を印加したとき、水銀面 ( $xy$  面) より上部、水銀との接触点付近での点弧子表面における電界強度  $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{\pm} \frac{d}{2}$  を Maxwell の計算式<sup>(2)</sup>から

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{\pm} \frac{d}{2} = \sqrt{\frac{d}{2\pi}} \frac{V_{\infty}}{\sqrt{\epsilon}} \quad \dots\dots\dots(1)$$

と与えた。ただし  $\varphi$  は点弧子の電位、 $V_{\infty}$  は  $z = \infty$  における一定の電界強度である。

そしてたとえば  $d = 0.5\text{cm}$ ,  $z = 10^{-8}\text{cm}$ ,  $V_{\infty} = 200\text{ V/cm}$  としてみると

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{\pm} \frac{d}{2} = 10^6\text{ V/cm} \quad \dots\dots\dots(2)$$

となるが、この電界強度の値は冷陰極放射によつて水銀から電子を放出させるに十分であり、したがつて点弧子と水銀間に陰極弧光を発生させようと説明している。

しかし平行平板状の点弧子なるものは、その形が現実に用いられるものとは相当異なつているので、もつと実際の形に近い場合につき調べてみる必要を感じた。そこで筆者等ははその第一着手として円柱型点弧子の場合につき計算を行い、J. Slepian 等の計算結果と比較してみた。

## 2. 円柱型導体内の電位分布を定める基本式

一般に一定の導電率  $\sigma$  なる導体に電圧を印加したとき導体内に電荷の集積がなければ、その導体内の電流密度分布は

$$i = \sigma \text{ grad } \varphi, \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$\text{div } i = 0 \quad \dots\dots\dots(4)$$

が成立する。これからただちに

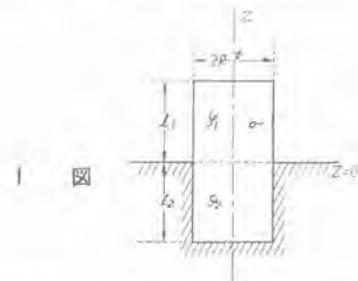
$$\Delta \varphi = 0, \quad \left(\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \quad \dots\dots\dots(5)$$

が導かれるが、これを 1 図のような半径  $R$  の円柱型点弧子の場合にあてはめて、(5) 式を円筒座標で書けば

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + R^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} 0 < z < l_1 \\ 0 < r < 1 \end{array}\right) \quad \dots\dots(6)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} + R^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} -l_2 < z < 0 \\ 0 < r < 1 \end{array}\right) \quad (7)$$

となる。ただし  $\rho = Rr$  ( $0 \leq r \leq 1$ ) である。



しかして現在の問題に対する境界条件はつぎのとおりである。

$$r = 0 \text{ で } \varphi_1, \varphi_2 \text{ は有限}, \quad \dots\dots\dots(8)$$

$$z = l_1 \text{ で } \varphi_1 = E, \quad \dots\dots\dots(9)$$

$$z = 0 \text{ で } \varphi_1 = \varphi_2, \quad \dots\dots\dots(10)$$

$$z = -l_2 \text{ で } \varphi_2 = 0, \quad \dots\dots\dots(11)$$

$$\left. \begin{array}{l} z < 0 \\ r = 1 \end{array} \right\} \text{ で } \varphi_2 = 0, \quad \dots\dots\dots(12)$$

$$\left. \begin{array}{l} z > 0 \\ r = 1 \end{array} \right\} \text{ で } \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = 0. \quad \dots\dots\dots(13)$$

また  $z = 0$  の面を通して電位  $\varphi_2$  なる部分に入流する電流は水銀との境界からことごとく流出する筈であるから、

$$2\pi R^2 \int_0^1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right)_{z=0} r dr = 2\pi R^2 \int_0^1 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\right)_{z=l_2} r dr + 2\pi \int_0^{-l_2} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial r}\right)_{r=1} dz. \quad \dots\dots\dots(14)$$

以上の(6)式ないし(14)式が現在の問題に対する基本式である。

### 3. 基本式の解

付録(D)に示すような計算により半径Rなる円柱型点弧子に対する $\varphi_1$ および $\varphi_2$ はつぎのような形で解かれる

$$\varphi_1 = E \left\{ 1 - bl_1 + bz + \sum_{s=1}^{\infty} B_s \sinh \frac{\beta_s(l_1 - z)}{R} J_0(\beta_s r) \right\} \quad \dots\dots\dots(15)$$

$$\left( \begin{array}{l} 0 \leq z \leq l_1, \\ 0 \leq r \leq 1 \end{array} \right)$$

$$\varphi_2 = E \sum_{s=1}^{\infty} A_s \sinh \frac{\alpha_s(l_2 + z)}{R} J_0(\alpha_s r), \quad \dots\dots\dots(16)$$

$$\left( \begin{array}{l} -l_2 \leq z \leq 0, \\ 0 \leq r \leq 1 \end{array} \right)$$

ただし $\alpha_s$ は零次の Bessel 函数  $J_0(x)=0$ の根で

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3, \dots\dots\dots,$$

$\beta_s$ は1次の Bessel 函数  $J_1(x)=0$ の根で

$$0 < \beta_1 < \beta_2 < \beta_3, \dots\dots\dots,$$

また、 $b, B_s, A_s$ は境界条件(10)および(14)から定まる定数である。

### 4. $b, B_s, \text{ および } A_s$ の決定

(15)式および(16)式に(10)および(14)の関係を代入すれば、それぞれ

$$\begin{aligned} 1 - bl_1 + \sum_{s=1}^{\infty} B_s \sinh \frac{\beta_s l_1}{R} J_0(\beta_s r) \\ = \sum_{s=1}^{\infty} A_s \sinh \frac{\alpha_s l_2}{R} J_0(\alpha_s r), \quad \dots\dots\dots(17) \end{aligned}$$

$$(0 \leq r \leq 1),$$

$$b = \frac{2}{R} \sum_{s=1}^{\infty} A_s \cosh \frac{\alpha_s l_2}{R} J_1(\alpha_s) \quad \dots\dots\dots(18)$$

がえられる。(18)式を(17)式に代入すると

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{s=1}^{\infty} B_s \sinh \frac{\beta_s l_1}{R} J_0(\beta_s r) = \sum_{s=1}^{\infty} A_s J_1(\alpha_s) \\ \left\{ \frac{2l_1}{R} \cosh \frac{\alpha_s l_2}{R} + \sinh \frac{\alpha_s l_2}{R} \frac{J_0(\alpha_s r)}{J_1(\alpha_s)} \right\}, \end{aligned}$$

$$(0 \leq r \leq 1), \quad \dots\dots\dots(19)$$

つぎに付録(D)に示すような計算により

$$\alpha_s A_s J_1(\alpha_s) \sinh \frac{\alpha_s l_2}{R} \text{を } G_s \text{ とおくと}$$

$$4G_m = \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ \frac{4}{\alpha_s^2} + \alpha_m^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_m^2 - \beta_n^2)(\alpha_s^2 - \beta_n^2)} \right\} G_s \quad \dots\dots\dots(20)$$

がえられ、 $G_s/G_1 = G_s$ として $m=1, 2, 3, \dots\dots$ ととつて

円柱型点弧子内部の電位分布および電流密度分布・菅野・岡田

いくと $G_2, G_3, \dots\dots$ に対する一次連立方程式が導かれ、近似計算によつて1表のような $\overline{G}_s$  ( $s=2, 3, \dots$ )の値が求まる。

しかして  $\lim_{s \rightarrow \infty} \overline{G}_s = 0$ なることの証明は付録(II)に示すとおりである。

1 表

$\overline{G}_2 = 0.99982$	$\overline{G}_7 = 0.99799$	$\overline{G}_{12} = 0.99761$
$\overline{G}_3 = 0.99966$	$\overline{G}_8 = 0.99789$	$\overline{G}_{13} = 0.99752$
$\overline{G}_4 = 0.99936$	$\overline{G}_9 = 0.99690$	$\overline{G}_{14} = 0.99730$
$\overline{G}_5 = 0.99863$	$\overline{G}_{10} = 0.99774$	
$\overline{G}_6 = 0.99787$	$\overline{G}_{11} = 0.99842$	

$G_1$ の値としてはつぎのような近似計算を用いて定められた。すなわち $\overline{G}_2 \sim \overline{G}_{14}$ の値は1表に示すようにきわめて1に近い。しかしとに角 $\overline{G}_\infty$ は0。したがつて $\overline{G}_2, \overline{G}_3, \dots$ なる数列は0に収斂するが、その収斂はきわめておそい。それで $s$ の大きい所で $\overline{G}_s$ を計算するのは容易でないのでおよその見当をつける所で我慢する。

まず(A・12)式より、 $l_2/R \gg 1$ として

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{1}{2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{G_s}{\alpha_s^2} + \frac{2l_1}{R} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{G_s}{\alpha_s} \coth \frac{\alpha_s l_2}{R}} \\ &\cong \frac{1}{2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{G_s}{\alpha_s^2} + \frac{2l_1}{R} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{G_s}{\alpha_s}} \\ &< \frac{1}{2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{G_s}{\alpha_s^2} + \frac{14}{R} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{G_s}{\alpha_s}} = \frac{1}{0.492 + \frac{2l_1}{R} \times 1.081} \\ &= \frac{1}{0.492 + 2.162 \frac{l_1}{R}} \end{aligned}$$

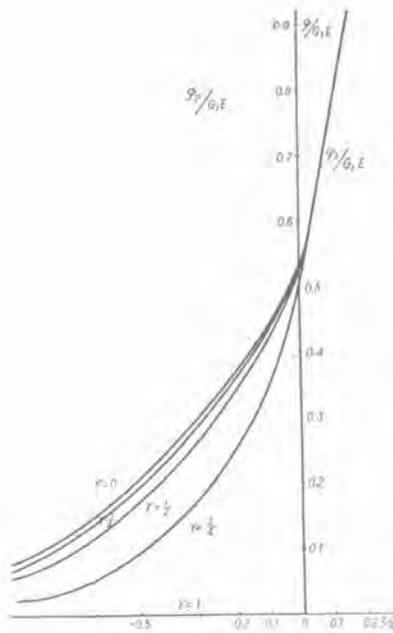
所で先に述べたように数列の収斂が非常におそいことを考えれば $s=50$ 程度まで $G_s=1$ として計算してもなお

$$G_1 > \frac{1}{2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_s^2} + \frac{2l_1}{R} \sum_{s=1}^{50} \frac{1}{\alpha_s}} = \frac{1}{0.492 + 2.95 \frac{l_1}{R}} \quad \dots\dots(21)$$

(21)式より $\frac{l_1}{R}$ の値に対する $G_1$ の値を求めると2表のようになる。

2 表

$l_1/R=2.5$ のとき $G_1 < 0.127$	$l_1/R=10$ のとき $G_1 < 0.0334$
$l_1/R=5$ " $G_1 < 0.066$	$l_1/R=15$ " $G_1 < 0.0226$



2 図

なお  $\varphi_1$  の式で、もつとも大きく利いてくるのは  $G_1$  を含まない項で  $G_1$  を含む項は小さいものとなるから、大体の所では  $\varphi_1$  を図示しうるわけである。(〔§5のb〕の場合は2表の  $G_1$  の値を用いた。)

$b$  の値としては(18)式および(A.10)式より

$$b = \frac{2}{R} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{G_s}{\alpha_s} \coth \frac{\alpha_s l_2}{R}$$

これに(A.12)式を代入し

$$b = \frac{1}{l_1} \left( 1 - 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{G_s}{\alpha_s^2} \right) \approx \frac{1}{l_1} (1 - 0.49 \cdot 2G_1) \quad (22)$$

## 5. 点弧子内部の電位分布

### ア. 水銀面以下の電位分布

(16)式および(A.10)式より

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= E \sum_{s=1}^{\infty} A_s \sinh \frac{\alpha_s (l_2 + z)}{R} J_0(\alpha_s r) \\ &= E \sum_{s=1}^{\infty} \frac{G_s J_0(\alpha_s r)}{\alpha_s J_1(\alpha_s)} \left( \cosh \frac{\alpha_s z}{R} + \coth \frac{\alpha_s l_2}{R} \sinh \frac{\alpha_s z}{R} \right) \\ &\approx E G_1 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_s r)}{\alpha_s J_1(\alpha_s)} l_1^{-\frac{z}{R}}, \quad (\text{ただし } \frac{l_2}{R} \gg 1), \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(23)$$

いま  $r=0$  (点弧子中心),  $r = \frac{1}{4}$ ,  $r = \frac{1}{2}$ ,  $r = \frac{3}{4}$ ,  $r=1$  (点弧子表面) についての電位  $\varphi_2$  を計算してみると3表のようになる。

### イ. 水銀面以上の電位分布

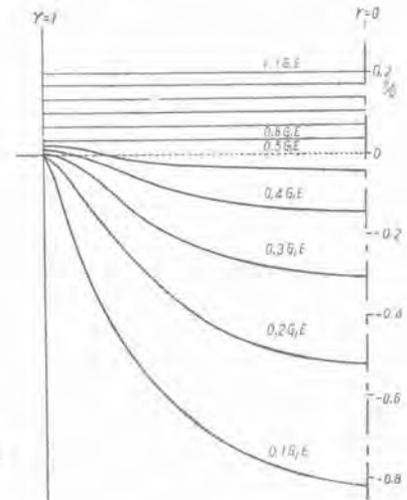
(15)式, (A.10)式および(22)式より

3 表  $\varphi_2/GE$  の値

$r$ $z$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
0	0.536	0.534	0.529	0.515	0
$-R/10$	0.435	0.431	0.428	0.357	0
$-R/5$	0.370	0.358	0.347	0.245	0
$-R/4$	0.339	0.330	0.312	0.209	0
$-R/2$	0.215	0.210	0.170	0.092	0
$-R$	0.070	0.065	0.050	0.025	0
$-2R$	0.007	0.006	0.005	0.002	0

4-表  $\varphi_1'/G$  の値

$r$ $z$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
0	$4.4 \cdot 10^{-2}$	$4.2 \cdot 10^{-2}$	$3.7 \cdot 10^{-2}$	$2.2 \cdot 10^{-2}$	-0.492
$R/10$	$1.7 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$1.06 \cdot 10^{-3}$	$2.3 \cdot 10^{-4}$	$-2.78 \cdot 10^{-3}$
$R/4$	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$9 \cdot 10^{-4}$	$6.5 \cdot 10^{-4}$	$-1.2 \cdot 10^{-3}$	$-8.5 \cdot 10^{-4}$
$R/2$	$5 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$2.1 \cdot 10^{-4}$	$-9 \cdot 10^{-5}$	$-2.6 \cdot 10^{-4}$
$R$	$8 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-5}$	$2.2 \cdot 10^{-5}$	$-1.6 \cdot 10^{-5}$	$-3.4 \cdot 10^{-5}$
$2R$	$2 \cdot 10^{-6}$	$1.4 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-7}$	$-4 \cdot 10^{-7}$	$-7 \cdot 10^{-7}$



3 図

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= E \left\{ 1 - bl_1 + bz + \sum_{s=1}^{\infty} B_s \sinh \frac{\beta_s (l_1 - z)}{R} J_0(\beta_s r) \right\} \\ &\approx E G_1 \left\{ 0.492 + \left( \frac{1}{G_1} - 0.492 \right) \frac{z}{l_1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_s r)}{J_0(\beta_s)} e^{-\beta_s \frac{z}{R}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m^2 - \beta_s^2} \right\} \quad (24) \end{aligned}$$

すなわち  $\varphi_1$  は3個の項よりなり第1項は  $z$  に無関係に一定値を示し、第2項は  $z$  に関し直線的に増大し、第3項は  $z$  に関し指数函数的に減少する。いま第3項を  $\varphi_1'$  とすると、(ア)の場合と同様に電位  $\varphi_1'$  を計算すると4表のようになる。

$r$  をパラメタとして  $\varphi_1$  と  $\varphi_2$  とをまとめて書くと 2 図のようになり、これを等電位面の形に書き直すと 3 図のようになるが、この図から等電位面は  $z=0, r=1$  の点付近に集中し、この点付近では電界強度も電流密度も大きくなることわかる。

### 6. 水銀面以下の部分の電流密度

(16) 式より

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \rho} = \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = \frac{E}{R} \sum_{s=1}^{\infty} A_s (-\alpha_s) \sinh \frac{\alpha_s (l_2 + z)}{R} \cdot$$

$$\cdot J_1(\alpha_s r) \approx -\frac{E}{R} \sum_{s=1}^{\infty} G_s \frac{J_1(\alpha_s r)}{J_1(\alpha_s)} e^{-\alpha_s \frac{z}{R}}$$

(ただし  $\frac{l_2}{R} \gg 1$ ),

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = E \sum_{s=1}^{\infty} A_s \frac{\alpha_s}{R} \cosh \frac{\alpha_s (l_2 + z)}{R} J_0(\alpha_s r)$$

$$\approx \frac{E}{R} \sum_{s=1}^{\infty} G_s \frac{J_0(\alpha_s r)}{J_1(\alpha_s)} e^{-\alpha_s \frac{z}{R}} \quad (\text{ただし } \frac{l_2}{R} \gg 1),$$

$$|i| = \sigma \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\right)^2} \quad \dots\dots\dots(25)$$

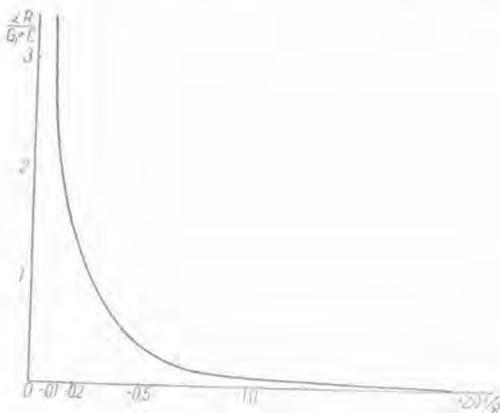
(25)式が水銀面以下の部分の電流分布を示す式である、いま点弧子表面より水銀中に流れ出す電流密度を計算する場合は (25) 式において  $r=1$  なる場合ゆえ

$$|i|_{r=1} = \frac{\sigma E}{R} \sum_{s=1}^{\infty} G_s e^{-\alpha_s \frac{z}{R}} \quad \dots\dots\dots(26)$$

これを計算すると 5 表のようになり、これを図示すると 4 図のようになる。

5 表

$z/R$	0	-0.1	-0.2	-0.25	-0.5	-1	-2
$\sum_{s=1}^{\infty} e^{-\alpha_s \frac{z}{R}}$	$\infty$	2.79	1.3137	1.002	0.038	0.00945	0.008



4 図

つぎに水銀中に流れ出す全電流を計算してみる。側面より流れ出す電流を  $I_1$ 、底面より流れ出す電流を  $I_2$  とすると、

$$I_1 = 2\pi R \int_0^{-l_2} (i_r)_{r=1} dz = 2\pi R \sigma E$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} G_s \frac{-1 + \cosh \frac{\alpha_s l_2}{R}}{\alpha_s \sinh \frac{\alpha_s l_2}{R}}$$

$$I_2 = 2\pi \int_0^R (i_z)_{z=-l_2} \rho d\rho = -2\pi R \sigma E \cdot$$

$$\cdot \sum_{s=1}^{\infty} G_s \frac{1}{\alpha_s \sinh \frac{\alpha_s l_2}{R}}$$

したがって全電流  $I$  は  $I = I_1 + I_2 = 2\pi R \sigma E \cdot$

$$\cdot \sum_{s=1}^{\infty} G_s \frac{\coth \frac{\alpha_s l_2}{R}}{\alpha_s}$$

(A・12) 式より

$$I = 2\pi R \sigma E \frac{R}{l_1} \left( \frac{1}{2} - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{G_s}{\alpha_s^2} \right) \cdot$$

ゆえに点弧子の等価抵抗を  $r_a$  とすると

$$r_a = \frac{E}{I} = \frac{l_1}{2\pi R^2 \sigma} \frac{1}{\left( \frac{1}{2} - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{G_s}{\alpha_s^2} \right)}$$

$$= \frac{l_1}{\sigma \pi R^2} \frac{1}{\left( 1 - 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{G_s}{\alpha_s^2} \right)} \approx \frac{l_1}{\sigma \pi R^2} \cdot$$

$$\cdot \left( 1 + 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{G_s}{\alpha_s^2} \right) \approx \frac{l_1}{\sigma \pi R^2} (1 + 0.492 G_1) \dots\dots\dots(27)$$

すなわち点弧子の等価抵抗は  $\frac{l_2}{R} \gg 1$  なる場合は  $l_2 = 0$  なる場合より 0.492  $G_1$  倍だけ増加する。

### 7. 水銀面以上の電位傾度

(15) 式より水銀面以上で  $z$  方向の電位傾度の大きさは

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = E \left\{ \left( 1 - 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{G_s}{\alpha_s^2} \right) \frac{1}{l_1} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_s r)}{2 J_0(\beta_s)} \frac{\beta_s}{R} \right.$$

$$\left. \left( \frac{\sinh \frac{\beta_s z}{R}}{\tanh \frac{\beta_s l_1}{R}} - \frac{\cosh \frac{\beta_s z}{R}}{R} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{G_m}{\alpha_m^2 - \beta_s^2} \right\}$$

$$\approx E \left\{ \left( 1 - 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{G_s}{\alpha_s^2} \right) \frac{1}{l_1} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\beta_s J_0(\beta_s r)}{J_0(\beta_s)} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot e^{-\frac{\beta_s z}{R}} \left( -\frac{1}{2R} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{G_m}{\alpha_m^2 - \beta_s^2} \right\} \dots\dots\dots(28)$$

(ただし  $\frac{l_1}{R} \gg 1$ )

しかして点弧子表面の電位傾度は (28) 式で  $r=1$  とした場合であるから

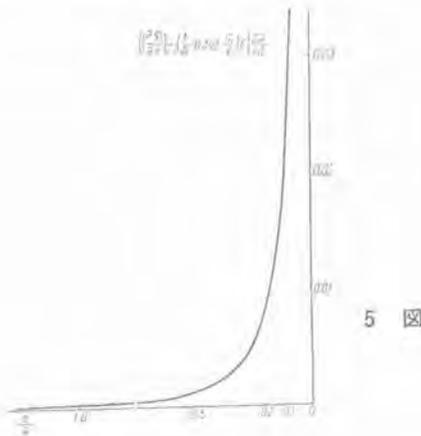
$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right)_{r=1} \cong E \left\{ \left(1 - 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{G_s}{\alpha_s^2} \right) \frac{1}{l_1} - \frac{1}{2R} \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \beta_s e^{-\frac{\beta_s}{R} z} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{G_m}{\alpha_m^2 - \beta_s^2} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

すなわち点弧子表面の電位傾度は  $z$  に無関係な第 1 項と  $z$  に関し指数函数的に減少する第 2 項とよりなる。いま第 2 項を計算すると 6 表のようになり、これを図に示せば 5 図のようになる。

6 表より電位傾度は点弧子表面の水銀との接触部付近では非常に大きくなることがわかる。

6 表

$z/R$	0	0.10, 25	0.5	1
$-\sum_{s=1}^{\infty} \beta_s e^{-\frac{\beta_s}{R} z} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{G_m}{\alpha_m^2 - \beta_s^2}$	$\infty$	0.020 4 $G_1$ 54 $G_1$	0.0011 0.0011 $G_1$ 3 $G_1$	0.0001 0.0001 $G_1$ 3 $G_1$



8. むすび

一様な円柱型点弧子の一部を水銀中に挿入して、これに電圧を印加したときの電位分布、および電流密度分布を計算し、さきに Slepian 等の平行平板状点弧子の場合につき導いた結果と比較してほぼどのような結果に達した。

拙筆にあたり、大野物理課長の有益な示唆に感謝する

文 献

- (1) J. Slepian and L.R. Ludwig; A.I.E.E. p. 23~27. Jan. 1932.
- (2) Maxwell; Electricity and Magnetism 3rd Edition § 93. p. 297

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + R^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

$$(0 < r < 1) \quad (A \cdot 1)$$

において、 $\varphi = P(r) Z(z)$  として変数分離を行えば

$$\frac{P''(r)}{P(r)} + \frac{1}{r} \frac{P'(r)}{P(r)} + R^2 \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0 \quad (A \cdot 2)$$

がえられるが、これは  $k^2$  を定数として

$$R^2 \frac{Z''(z)}{Z(z)} = k^2, \quad (A \cdot 3)$$

$$P''(r) + \frac{1}{r} P'(r) + k^2 P(r) = 0 \quad (A \cdot 4)$$

の二つの方程式に分離される。

(A・3)の特解は定数,  $z$ , (以上  $k=0$  に対して),

$$\frac{k}{R} z, \quad -\frac{k}{R} z \quad (\text{以上 } k \neq 0 \text{ に対して}),$$

(A・4)の特解は定数,  $\log r$  (以上  $k=0$  に対して),

$$J_0(kr), Y_0(kr) \quad (\text{以上 } k \neq 0 \text{ に対して}),$$

であるが  $\varphi$  が  $r=0$  で有限であるという条件により  $\log r, Y_0(kr)$  は考えなくてもよいから結局  $\varphi$  の一般解は

$$\varphi = a + bz + \sum_{k \neq 0} \left( A'_k e^{\frac{k}{R} z} + B'_k e^{-\frac{k}{R} z} \right) J_0(kr), \quad (A \cdot 5)$$

$$(0 \leq r \leq 1)$$

となる。これを  $\varphi_1, \varphi_2$  に分けて書けば、

$$\varphi_1 = a'_1 + b'_1 z + \sum_{k_1 \neq 0} \left( A'_{k_1} e^{\frac{k_1}{R} z} + B'_{k_1} e^{-\frac{k_1}{R} z} \right) \cdot J_0(k_1 r) \quad (A \cdot 6)$$

$$(0 \leq z \leq l_1, 0 \leq r \leq 1),$$

$$\varphi_2 = a'_2 + b'_2 z + \sum_{k_2 \neq 0} \left( A'_{k_2} e^{\frac{k_2}{R} z} + B'_{k_2} e^{-\frac{k_2}{R} z} \right) \cdot J_0(k_2 r), \quad (A \cdot 7)$$

$$(-l_2 \leq z \leq 0, 0 \leq r \leq 1)$$

となる。(A・6), (A・7)式に本文における境界条件 (9), (11), (12) および (13) を代入すれば結局 (15) 式および (16) 式が導かれるのである。

付 録 II

$$1 + \sum_{s=1}^{\infty} B_s \sinh \frac{\beta_s l_1}{R} J_0(\beta_s r) = \sum_{s=1}^{\infty} A_s J_1(\alpha_s) \cdot \left\{ \frac{2l_1}{R} \cosh \frac{\alpha_s l_2}{R} + \sinh \frac{\alpha_s l_2}{R} \frac{J_0'(\alpha_s r)}{J_1(\alpha_s)} \right\}, \dots\dots (19)$$

$$(0 \leq r \leq 1)$$

において  $\int_0^1 (19) \times J_0(\beta_m r) r dr$  をつくり、Lommel

の定理を利用すれば、

$$\int_0^1 J_0(\beta_m r) J_0(\beta_s r) r dr = 0, \quad (s \neq m)$$

$$= 2 J_0'(\beta_m)^2, \quad (s = m)$$

$$\int_0^1 J_0(\beta_m r) J_0(\alpha_s r) r dr = \frac{\alpha_s}{\alpha_s^2 - \beta_m^2} \cdot J_1(\alpha_s) J_0(\beta_m)$$

なるゆえ

$$B_m \sinh \frac{\beta_m l_1}{R} J_0'(\beta_m) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\infty} A_s J_1(\alpha_s) \cdot \frac{\alpha_s}{\alpha_s^2 - \beta_m^2} \sinh \frac{\alpha_s l_2}{R} \quad (\text{A} \cdot 8)$$

がえられる。

どうようにして、 $\int_0^1 (19) \times J_0(\alpha_m r) r dr$  をつくり、

Lommel の定理を利用すれば、

$$\frac{1}{\alpha_m} + \sum_{s=1}^{\infty} B_s \frac{\alpha_m}{\alpha_m^2 - \beta_s^2} \sinh \frac{\beta_s l_1}{R} J_0'(\beta_s)$$

$$= 2 A_m J_1(\alpha_m) \sinh \frac{\alpha_m l_2}{R} + \frac{2 l_1}{R} \frac{1}{\alpha_m} \sum_{s=1}^{\infty} A_s \cdot J_1(\alpha_s) \cosh \frac{\alpha_s l_2}{R} \quad (\text{A} \cdot 9)$$

(A・8)式を(A・9)式に代入し

$$G_s = \alpha_s A_s J_1(\alpha_s) \sinh \frac{\alpha_s l_2}{R} \quad (\text{A} \cdot 10)$$

とおくと、

$$1 = 2 G_m + \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ \frac{2 l_1 \coth \frac{\alpha_s l_2}{R}}{R \alpha_s} - \frac{\alpha_m^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_m^2 - \beta_n^2)(\alpha_s^2 - \beta_n^2)} \right\} G_s \quad (\text{A} \cdot 11)$$

つぎに  $\int_0^1 (19) \times r dr$  をつくれば

$$\frac{1}{2} = \sum_{s=1}^{\infty} A_s J_1(\alpha_s) \left\{ \frac{l_1}{R} \cosh \frac{\alpha_s l_2}{R} + \frac{1}{\alpha_s} \sinh \frac{\alpha_s l_2}{R} \right\} \cdot$$

すなわち

$$\frac{1}{2} = \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ \frac{l_1}{R} \frac{1}{\alpha_s} \coth \frac{\alpha_s l_2}{R} + \frac{1}{\alpha_s^2} \right\} G_s \quad (\text{A} \cdot 12)$$

(A・12)式を(A・11)式に代入すれば

$$4 G_m = \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ \frac{4}{\alpha_s^2} + \alpha_m^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_m^2 - \beta_n^2)(\alpha_s^2 - \beta_n^2)} \right\} G_s \quad (20)$$

がえられる。

円柱型点粒子内部の電位分布および電流密度分布・菅野・岡田

### 付 録 III

$\lim_{m \rightarrow \infty} G_m = 0$  はつぎのようにして証明される。すなわち (20) 式より

$$\lim_{m \rightarrow \infty} G_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{G_s}{\alpha_s^2} + \frac{\alpha_m^2}{4} \sum_{s=1}^{\infty} G_s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_m^2 - \beta_n^2)(\alpha_s^2 - \beta_n^2)} \right\}$$

ここで  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m^2 - \beta_n^2}$  および  $\sum_{s=1}^{\infty} \frac{G_s}{\alpha_s^2 - \beta_n^2}$  はともに絶対収斂なるゆえ、上式の右辺の二重級数項では和の順序および  $\lim$  と  $\sum$  との順序を変えることができる。

$$\lim_{m \rightarrow \infty} G_m = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{G_s}{\alpha_s^2} + \frac{1}{4} \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m^2 \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m^2 - \beta_n^2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{G_s}{\alpha_s^2 - \beta_n^2} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{G_s}{\alpha_s^2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha_m^2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{G_s}{\alpha_s^2 - \beta_n^2} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{G_s}{\alpha_s^2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{G_s}{\alpha_s^2 - \beta_n^2} \quad (\text{A} \cdot 13)$$

いま (19) 式で  $r=1$  として、これに (A・8) 式および (A・10) 式を代入すると

$$1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{G_s}{\alpha_s^2 - \beta_n^2} = \frac{2 l_1}{R} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{G_s}{\alpha_s} \coth \frac{\alpha_s l_2}{R} \quad (\text{A} \cdot 14)$$

(A・12)式より

$$1 = \frac{2 l_1}{R} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{G_s}{\alpha_s} \coth \frac{\alpha_s l_2}{R} + 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{G_s}{\alpha_s^2}$$

であるから (A・14) 式に代入すれば

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{G_s}{\alpha_s^2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{G_s}{\alpha_s^2 - \beta_n^2} = 0,$$

すなわち  $\lim_{m \rightarrow \infty} G_m = 0$  となる。

(A・15)

# Heaviside 演算子法に對する新しい考察とその電氣回路解析における應用 (XIX)

研究所 菅野正雄

かくして4個の境界条件, (VII. 11), (VII. 12), (VII. 34) 及び (VII. 35) を参照して微分方程式 (VII. 28) 及び (VII. 29) を解けば

$$F_1(\lambda, x; \xi) = \frac{E}{\Delta} \left\{ \Delta \sinh m_1 x + \Delta_2 \sinh m_2 x + \Delta_3 (\cosh m_1 x - \cosh m_2 x) \right\}, \quad (0 < x < 1), \dots\dots\dots(\text{VII. 36})$$

$$F_2(\lambda, x; \xi) = \frac{E}{\Delta} \left\{ \frac{m_1^3 \Delta_3}{r m_1^2 - L\lambda} \sinh m_1 x - \frac{m_2^3 \Delta_3}{r m_2^2 - L\lambda} \sinh m_2 x + \frac{m_1^3 \Delta_4}{r m_1^2 - L\lambda} \cosh m_1 x + \frac{m_2^3 \Delta_4}{r m_2^2 - L\lambda} \cosh m_2 x \right\}, \quad (0 < x < 1) \dots\dots\dots(\text{VII. 37})$$

となる。こゝに  $\pm m_1$  及び  $\pm m_2$  は4次方程式

$$\left\{ rK\lambda + (1+gr) \right\} m^4 - \left\{ KL\lambda^2 + (rC+gL)\lambda + rG \right\} m^2 + (CL\lambda^2 + GL\lambda) = 0 \dots\dots\dots(\text{VII. 38})$$

の根であつて、周知の如く、

$$m_1^2 + m_2^2 = \frac{KL\lambda^2 + (rC+gL)\lambda + rG}{rK\lambda + (1+gr)}, \dots\dots\dots(\text{VII. 39})$$

$$m_1^2 m_2^2 = \frac{CL\lambda^2 + GL\lambda}{rK\lambda + (1+gr)} \dots\dots\dots(\text{VII. 40})$$

の關係がある。また

$$\begin{aligned} \Delta &= 2m_1 m_2 (r m_1^2 - L\lambda)(r m_2^2 - L\lambda)(\cosh m_1 \cosh m_2 - 1) \\ &\quad + 2\xi L\lambda(m_1^2 - m_2^2) \left\{ m_1(r m_1^2 - L\lambda) \cosh m_1 \sinh m_2 - m_2^2(r m_2^2 - L\lambda) \sinh m_1 \cosh m_2 \right\} \\ &\quad - \left\{ \xi^2 L^2 \lambda^2 (m_1^2 - m_2^2)^2 + (r^2 m_1^2 m_2^2 + L^2 \lambda^2)(m_1^2 + m_2^2) - 4rL\lambda m_1^2 m_2^2 \right\} \sinh m_1 \sinh m_2, \\ \Delta_1 &= m_2(r m_1^2 - L\lambda) \left\{ \xi m_1^2 (r m_2^2 - L\lambda) \cosh m_1 - \xi (r m_1^2 m_2^2 + L\lambda(m_1^2 - 2m_2^2)) \cosh m_2 + m_1(r m_2^2 - L\lambda) \sinh m_1 - m_2 \left[ L\lambda \left[ \xi^2 (m_1^2 - m_2^2) - 1 \right] + r m_1^2 \right] \sinh m_2 \right\}, \\ \Delta_2 &= -m_1(r m_2^2 - L\lambda) \left\{ \xi (r m_1^2 m_2^2 - L\lambda(2m_1^2 - m_2^2)) \cosh m_1 - \xi m_2^2 (r m_1^2 - L\lambda) \cosh m_2 - m_1 \left[ L\lambda \left[ \xi^2 (m_1^2 - m_2^2) + 1 \right] - r m_2^2 \right] \sinh m_1 - m_2 (r m_1^2 - L\lambda) \sinh m_2 \right\}, \\ \Delta_3 &= -m_1 m_2 (r m_1^2 - L\lambda)(r m_2^2 - L\lambda) \left\{ \cosh m_1 - \cosh m_2 + \xi (m_1 \sinh m_1 - m_2 \sinh m_2) \right\} \end{aligned}$$

である。

以上の如くして  $F_e(\lambda, x; \xi)$  は  $\lambda$  及び  $x$  の函数として完全に定まつたわけであるが、これより巻線上の電位分布  $e(t, x; \xi)$  を求めるには

$$\begin{aligned} 1(t_0^+)e(t, x; \xi) &= \sigma_e(t, \lambda)F_e(\lambda, x; \xi) \\ &= L_e(t, \lambda)F_e(\lambda, x; \xi), \quad (0 < x < 1) \dots \dots \dots (\text{VII. 41}) \end{aligned}$$

を計算すればよいわけである。しかしこの計算は  $F_e(\lambda, x; \xi)$  の函数形の複雑なことからして一般には殆んど不可能に近い。

ただ、電位分布の  $t=+0$  における値すなわち初期分布及び  $t \rightarrow \infty$  における終局分布の内、時間  $t$  に無関係な部分だけは次の如くして計算される。

初期分布：これは第 III 篇、第 VIII 章において述べた方法を適用して次の様に求められる。すなわち

$$e(+0, x; \xi) = \lim_{r \rightarrow \infty} F_e(p, x; \xi) \cdot 1 = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} F_e(\lambda, x; \xi)$$

であるが、(VII. 39) 式及び (VII. 40) 式から

$$\begin{aligned} m_1 \rightarrow \alpha \left( = \sqrt{\frac{C}{K}} \right), \quad m_2 \rightarrow \frac{L\lambda}{r}, \\ rm_2^2 - L\lambda \rightarrow \frac{LG}{\beta^2 C} (\beta^2 - \alpha^2), \quad \left( \beta = \sqrt{\frac{rG}{1+gr}} \right) \end{aligned}$$

となる故、

$$\begin{aligned} e(+0, x; \xi) &= E \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\Delta_1}{\Delta} \sinh \alpha x + \frac{\Delta_3}{\Delta} \cosh \alpha x \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Delta} (\Delta_2 \sinh m_2 x - \Delta_3 \cosh m_2 x) \right\}, \quad (0 < x < 1) \end{aligned}$$

となる。しかして

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\Delta_1}{\Delta} &= \frac{1}{\sinh \alpha}, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta} (\Delta_2 \sinh m_2 x - \Delta_3 \cosh m_2 x) = 0, \quad (0 < x < 1), \\ \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\Delta_3}{\Delta} &= 0 \end{aligned}$$

であるから、結局

$$e(+0, x; \xi) = \frac{\sinh \alpha x}{\sinh \alpha} E, \quad (0 < x < 1) \dots \dots \dots (\text{VII. 42})$$

となる。

終局分布中時間  $t$  に無関係な部分  $e_3(\infty, x; \xi)$ ：これは

$$e_3(\infty, x; \xi) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} F_e(\lambda, x; \xi)$$

として得られる。何となれば (VII. 41) 式より

$$\begin{aligned} e(t, x; \xi) &= \left\{ K_0(t, \lambda) + \sum_k K a_k(t, \lambda) \right\} F_e(\lambda, x; \xi), \quad (0 < x < 1), \\ &\quad (\text{ただし、} a_k \text{ は } F_e(\lambda, x; \xi) \text{ の零以外の異常点}) \end{aligned}$$

と書けるが、第 III 篇、(IV. 8) 式によつて

$$K a_k(t, \lambda) F_e(\lambda, x; \xi) \equiv \varepsilon a_k t D(D + a_k)^{-1} K_0(t, \lambda) F_e(\lambda + a_k, x; \xi)$$

となるが、 $a_k \neq 0$  なるによりこれは時間  $t$  を含む。従つて  $e_3(\infty, x; \xi)$  は  $K_0(t, \lambda) F_e(\lambda + a_k, x; \xi)$  中に含まれているわけである。しかして  $F_e(\lambda, x; \xi)$  が  $\lambda=0$  において正則なるか、もしくは極を持つ場合ならば、

$$e_0(\infty, x; \xi) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \frac{e^{\lambda x}}{\lambda} F_e(\lambda, x; \xi) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} F_e(\lambda, x; \xi)$$

と表わされ、またもし、 $\lambda=0$  において分岐点を有するならばこれを Puiseux の級数 (第 III 篇, § IV. 5 参照) に展開してみることにより、同様に

$$e_0(\infty, x; \xi) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} F_e(\lambda, x; \xi)$$

と表わされるからである。

所で現在の場合についてこれを計算するに、 $\lambda \rightarrow 0$  においては

$$m_1 \rightarrow \beta, \quad m_2 \rightarrow \sqrt{\frac{L\lambda}{r}}, \quad rm_2^2 - L\lambda \rightarrow \frac{KL}{G}(\alpha^2 - \beta^2)\lambda^2$$

となるから

$$e_0(\infty, x; \xi) = E \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta_1}{\Delta} \sinh \beta x - \frac{\Delta_2}{\Delta} \sinh m_2 x - \frac{\Delta_3}{\Delta} (\cosh \beta x - 1) \right\}, \quad (0 < x < 1)$$

となる。しかして

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{\sinh \beta}, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\Delta_2}{\Delta} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\Delta_3}{\Delta} = 0$$

であるから、結局

$$e_0(\infty, x; \xi) = \frac{\sinh \beta x}{\sinh \beta} E, \quad (0 < x < 1) \quad \dots\dots\dots(\text{VII. 43})$$

となる。

更にもし、回路に損失の無い理想の場合 ( $r=0, g=G=0$ ) を考えると、 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  等の形は少しく簡単になるが、依然として  $F_e(\lambda, x; \xi)$  から  $e(\lambda, x; \xi)$  を計算することは困難である。くかしてこの場合の初期電位分布は (VII.42) 式と同様の形で表わされるが、終局電位分布中、時間  $t$  に無関係な部分  $\bar{e}_0(\infty, x; \xi)$  は

$$\bar{e}_0(\infty, x; \xi) = x \left\{ 1 - \frac{1}{6\xi^2 + 1} (x-1)(2x-1) \right\} E, \quad (0 < x < 1) \quad \dots\dots\dots(\text{VII. 44})$$

となり、明らかに

$$\bar{e}_0(\infty, x; \xi) = \lim_{\beta \rightarrow 0} e_0(\infty, x; \xi)$$

とはなっていないことがわかる。

なお、 $\bar{e}_0(\infty, x; \xi)$  は無損失回路に対する微分方程式

$$\left. \begin{aligned} i_1(t, x) &= K \frac{\partial^2 e(t, x)}{\partial x \partial t}, \\ C \frac{\partial e(t, x)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \{ i_1(t, x) + i_2(t, x) \}, \\ \frac{\partial e(t, x)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 M(x, y) i_2(t, y) dy, \end{aligned} \right\} \begin{cases} (t > 0, \\ 0 < x < 1) \end{cases}$$

から導かれる関係式

$$\left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} - KL \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} + CL \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) e(t, x) = 0, \quad \begin{cases} (t > 0, \\ 0 < x < 1) \end{cases} \quad \dots\dots\dots(\text{VII. 45})$$

の定常状態における関係

$$\frac{\partial^4 \bar{e}_0(\infty, x)}{\partial x^4} = 0, \quad (0 < x < 1)$$

を、境界条件

$$\begin{aligned} \bar{e}_0(\infty, 0) = 0, \quad \bar{e}_0(\infty, 1) = E, \\ \left[ \frac{\partial \bar{e}_0(\infty, x)}{\partial x} \right]_{x=0} = \xi \left[ \frac{\partial^2 \bar{e}_0(\infty, x)}{\partial x^2} \right]_{x=0}, \quad \left[ \frac{\partial \bar{e}_0(\infty, x)}{\partial x} \right]_{x=1} = -\xi \left[ \frac{\partial^2 \bar{e}_0(\infty, x)}{\partial x^2} \right]_{x=1} \end{aligned}$$

の下に解いて得られるものであることは当然である。

(4). (3) の問題に対する Bewley の解法

前節の問題については結局満足な結果を得ることができないことが判つた訳である、それにも拘わらずここにこれを採上げた理由は、Bewley がその著書<sup>9)</sup>中においてこの問題の完全解を求め得たと称しているが、実はその解法中には重大な数学的誤を含んでいることを指摘したいために他ならない。

ただし、変圧器の巻回間相互誘導に対する Bewley の物理的考察の十分ならざることはすでに指摘されている所であるから、<sup>6)</sup> 問題の数学的処理を如何に厳密に行つたとしてもそれは無意味であるとも云えようが、それであるからと云つてそのまま看過してしまえる程簡単な誤とは考えられない。しかし今日迄それが正しいものとして不問に付され、従つてその計算結果が他の考察との比較等にも引用されてきており、しかも電気工学上の簡単な常識の一つがこの誤に気付かぬなかつた一つの要因となつてゐることを思えば、ここにこれを論ずるのもあながち無意義ではあるまいと信ぜられるのである。

さて、その数学的誤を明らかにする前に、Bewley が採用した解法を文献 (5) に従つて記述してみる。問題の出発点は微分-積分方程式 (VII. 1), (VII. 2), (VII. 3), (VII. 4) および境界条件 (VII. 5'), (VII. 6) であるが、(VII. 4) 式の積分記号を除くためにこれを  $x$  について二回微分すると

$$\frac{\partial^4 e(t, x)}{\partial x^4} = \left( r \frac{\partial^2}{\partial x^2} - L \frac{\partial}{\partial t} \right) i_2(t, x), \quad \left( \begin{array}{l} t > 0, \\ 0 < x < 1 \end{array} \right) \dots\dots\dots(\text{VII. 46})$$

となる。所で (VII. 1), (VII. 2), (VII. 3), (VII. 46) 式から  $i_1(t, x)$ ,  $i_2(t, x)$  及び  $i_3(t, x)$  を消去すれば、電位分布  $e(t, x)$  の満足すべき微分方程式として

$$\left\{ rK \frac{\partial^5}{\partial x^4 \partial t} + (1+gr) \frac{\partial^4}{\partial x^4} - KL \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} - (rC+gL) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t} - rG \frac{\partial^2}{\partial x^2} + CL \frac{\partial^2}{\partial t^2} + GL \frac{\partial}{\partial t} \right\} e(t, x) = 0, \quad \left( \begin{array}{l} t > 0, \\ 0 < x < 1 \end{array} \right) \dots\dots\dots(\text{VII. 47})$$

が導かれる。しかしこの微分方程式の解は

- (i) 微分方程式,
- (ii)  $x=0$  及び  $x=1$  における境界条件,
- (iii)  $t=0$  なるときの初期分布状態,
- (iv)  $t \rightarrow \infty$  なるときの終局分布状態

を満足せねばならない。

まず、 $e(t, x)$  の初期分布状態  $e_1(x)$  及び終局分布状態  $e_2(x)$  を求める。

$e_1(x)$  は (VII. 47) 式において  $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \infty$  とし得られる微分方程式

$$\left( K \frac{\partial^2}{\partial x^2} - C \right) e_1(x) = 0, \quad (0 < x < 1) \dots\dots\dots(\text{VII. 48})$$

\*Bewley の原論文 (Trans. A. I. E. E., 50, 1228(1931)) 及び文献 (5) 中における  $M(\cdot, y)$  はこの形とは異なるが、以下の議論の本質には変りはない。

及び境界条件

$$e_1(0)=0, \quad e_1(1)=E$$

により定まり、それは

$$e_1(x) = \frac{\sinh \alpha x}{\sinh \alpha} E, \quad \left( \begin{array}{l} 0 < x < 1, \\ \alpha = \sqrt{rC/K} \end{array} \right) \dots\dots\dots(\text{VII. 49})$$

となる。

また  $\alpha(x)$  は (VII. 47) 式において  $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow 0$  として得られる微分方程式

$$\left\{ (1+gr) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - rG \right\} e_2(x) = 0, \quad (0 < x < 1) \dots\dots\dots(\text{VII. 50})$$

及び境界条件

$$e_2(0)=0, \quad e_2(1)=E$$

により定まり、それは

$$e_2(x) = \frac{\sin \beta x}{\sinh \beta} E, \quad \left( \begin{array}{l} 0 < x < 1, \\ \beta = \sqrt{rG/(1+gr)} \end{array} \right) \dots\dots\dots(\text{VII. 51})$$

の如く求められる。

今、かくの如くして得られた初期分布状態及び終局分布状態を参考として (VII. 47) 式の解を、試みに

$$e(t, x) = \frac{\sinh \beta x}{\sinh \beta} E + \sum A e^{ax+\mu t}, \quad \left( \begin{array}{l} t \geq +0, \\ 0 < x < 1 \end{array} \right) \dots\dots\dots(\text{VII. 52})$$

とおいてみる。ここに  $\Sigma$  は  $A$ ,  $a$  及び  $b$  の可能なるすべての値についての和を示す。(VII. 52) を (VII. 47) に代入すれば、 $a$ ,  $b$  間の関係として

$$rKa^4b + (1+gr)a^4 - KLa^2b^2 - (rC+gL)a^2b - rGa^2 + CLb^2 + GLb = 0 \dots\dots\dots(\text{VII. 53})$$

が得られるが、これを  $b$  に関して解けば

$$\begin{aligned} b = & - \frac{rKa^4 - (rC+gL)a^2 + GL}{2L(C-Ka^2)} \\ & \pm \sqrt{\frac{\{rKa^4 - (rC+gL)a^2 + GL\}^2 - 4L(C-Ka^2)\{(1+gr)a^2 - rGa^2\}}{4L^2(C-Ka^2)^2}} \\ = & -\delta \pm j\omega \dots\dots\dots(\text{VII. 54}) \end{aligned}$$

となる。今、 $a^2 = -\nu^2\pi^2$  すなわち  $a = \pm j\nu\pi$  と置き換えて (VII. 52) 式を三角函数を含む形式に書き直してみると

$$\begin{aligned} e(t, x) = & \frac{\sinh \beta x}{\sinh \beta} E + \sum_{\nu} e^{-\delta \nu t} \left\{ \left( A_1(\nu) \cos \omega \nu t + A_2(\nu) \sin \omega \nu t \right) \sin \nu \pi x \right. \\ & \left. + \left( A_3(\nu) \cos \omega \nu t + A_4(\nu) \sin \omega \nu t \right) \cos \nu \pi x \right\}. \quad \left( \begin{array}{l} t \geq +0, \\ 0 < x < 1 \end{array} \right) \dots\dots\dots(\text{VII. 55}) \end{aligned}$$

の如くなる。

この式において  $t=+0$  とすると  $e(t, x)$  は  $e_1(x)$  となる筈であるから、

$$\begin{aligned} e_1(x) = & \frac{\sinh \alpha x}{\sinh \alpha} E = \frac{\sin \beta x}{\sinh \beta} E + \sum_{\nu} \left\{ A_1(\nu) \sin \nu \pi x + A_3(\nu) \cos \nu \pi x \right\}, \\ & (0 < x < 1) \dots\dots\dots(\text{VII. 56}) \end{aligned}$$

である。しかるに

$$\frac{\sinh kx}{\sinh l} \equiv 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-)^{n-1} \frac{n\pi \sin n\pi x}{\alpha^2 + n^2\pi^2}; \quad (-1 < x < 1) \dots\dots\dots (\text{VII. 57})$$

なる関係ある故、これを用いて (VII. 5) 式を少しく書き直せば

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ A_1(\nu) \sin \nu\pi x + A_3(\nu) \cos \nu\pi x \right\} = (\alpha^2 - \beta^2) E \sum_{n=1}^{\infty} (-)^n \frac{n\pi \sin n\pi x}{(\alpha^2 + n^2\pi^2)(\beta^2 + n^2\pi^2)}, \quad (0 < x < 1) \dots\dots\dots (\text{VII. 58})$$

となる。従つて

$$A_3(\nu) = 0 \quad \dots\dots\dots (\text{VII. 59})$$

$$\nu = n, \quad (n = 1, 2, 3, \dots\dots\dots), \quad \dots\dots\dots (\text{VII. 60})$$

$$A_1(\nu) = A_1(n) = (\alpha^2 - \beta^2) E \frac{(-)^n n\pi}{(\alpha^2 + n^2\pi^2)(\beta^2 + n^2\pi^2)} \quad \dots\dots\dots (\text{VII. 61})$$

の如く定められる。

次に、(VII. 55) 式において  $x=1$  とおき、(VII. 59)、(VII. 60) の関係を考慮しつつ、境界条件 (VII. 6) を用いれば、

$$E = E + \sum_{n=1}^{\infty} (-)^n A_1(n) \sin \omega_n t, \quad (t \geq +0) \quad \dots\dots\dots (\text{VII. 62})$$

であるから、

$$A_1(n) = 0$$

となる。故に残りの  $A_2(n)$  を  $q_n A_1(n)$  と書き換えておけば

$$e(t, x) = \frac{\sinh \beta x}{\sinh \beta} E + 2(\alpha^2 - \beta^2) E \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n n\pi e^{-\delta_n t}}{(\alpha^2 + n^2\pi^2)(\beta^2 + n^2\pi^2)} \cdot (\cos \omega_n t + q_n \sin \omega_n t) \sin n\pi x, \quad \left( \begin{array}{l} t \geq +0, \\ 0 < x < 1 \end{array} \right) \dots\dots\dots (\text{VII. 63})$$

となる。しかして  $q_n$  なる定数は、誘導を通る電流  $i_2(t, x)$  が  $t=0$  においては巻線上のすべての点において零であるとする条件から決定される。すなわち (VII. 1)、(VII. 2)、(VII. 3) の三式より

$$\left[ \frac{\partial i_2(t, x)}{\partial x} \right]_{t=0} = \left\{ (G - g \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C \frac{\partial}{\partial t} - K \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t}) e(t, x) \right\}_{t=0} = 0, \quad (0 < x < 1) \dots\dots\dots (\text{VII. 64})$$

であるが、これに (VII. 63) 式を代入すれば次の式が導かれる。

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_1(n) \left\{ (G + gn^2\pi^2) - (\delta_n - \omega_n q_n)(C + Kn^2\pi^2) \right\} \sin n\pi x + (G - \beta^2 g) \frac{\sinh \beta x}{\sinh \beta} E = 0, \quad (0 < x < 1) \quad \dots\dots\dots (\text{VII. 65})$$

この式中の  $\frac{\sinh \beta x}{\sinh \beta}$  に (VII. 57) の関係を代入して整理すれば  $q_n$  は

$$\omega_n q_n = \delta_n + \frac{G - \beta^2 g}{C - \beta^2 K} - \frac{G + gn^2\pi^2}{C + Kn^2\pi^2} = \delta_n + \frac{(G - \alpha^2 g)(\beta^2 + n^2\pi^2)}{K(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + n^2\pi^2)}$$

から求められる。

かくして得られた  $q_n$  を代入した (VII. 63) 式が所要の解となる。

またもし、回路に損失が無いものと考えうる時は  $r=0, g=G=0$  なる故、(VII. 47) 式は

$$\left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} - KL \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} + Cl \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) e(t, x) = 0, \quad \left( \begin{array}{l} t < +0. \\ 0 < x < 1 \end{array} \right) \dots\dots\dots(\text{VII. 66})$$

となり、これを境界条件 (VII. 5') 及び (VII. 6) を考慮して解けば

$$e(t, x) = xE + 2E \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n \alpha^2 n^2 \pi^2}{\alpha^2 + n^2 \pi^2} \sin n\pi x \cos \frac{n^2 \pi^2 t}{\sqrt{L(C + Kn^2 \pi^2)}} \quad \left( \begin{array}{l} t \geq +0. \\ 0 < x < 1 \end{array} \right) \dots\dots\dots(\text{VII. 67})$$

となる。これは勿論 (VII. 93) 式の結果に於いて  $r \rightarrow 0, g = G \rightarrow 0$ , したがって  $\beta \rightarrow 0$  として得られるものであるが、これは Heaviside の展開定理を直接適用しても求め得られないものである。

(5). Bewley の解法の吟味

以上が Bewley の解法の大要であつて、まづ問題の解を適当な形に仮定し、然る後その中に含まれた未知量を微分方程式・初期条件並に境界条件を満足する様に定めると云う常套手段を用いて成功しているかの如くに見えるのであるが実はそうではない。

一体求むる電位分布  $e(t, x)$  の満足すべき微分方程式は (VII. 47) 式であつて、これは  $x$  については 4 次であから、が一義的に定まる爲には 4 個の境界条件を必要とする筈である。然るに Bewley の解法に於いてはそれは (VII. 5') 及び (VII. 6) の 2 個に過ぎない。他の 2 個の条件は (VII. 4) 式を  $x$  に就いて二回微分して (VII. 46) 式を得る際に導入されるものであつてそれは (VII. 30) ないし (VII. 33) 式に相当して

$$\left[ \frac{\partial e(t, x)}{\partial x} \right]_{x=0} = r i_2(t, 0) + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 M(0, y) i_2(t, y) dy, \quad (t \geq +0),$$

$$\left[ \frac{\partial e(t, x)}{\partial x} \right]_{x=1} = r i_2(t, 1) + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 M(1, y) i_2(t, y) dy, \quad ( \dots ),$$

$$\left[ \frac{\partial^2 e(t, x)}{\partial x^2} \right]_{x=0} = r \left[ \frac{\partial i_2(t, x)}{\partial x} \right]_{x=0} + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 \left[ \frac{\partial M(x, y)}{\partial x} \right]_{x=0} i_2(t, y) dy, \quad ( \dots ),$$

$$\left[ \frac{\partial^2 e(t, x)}{\partial x^2} \right]_{x=1} = r \left[ \frac{\partial i_2(t, x)}{\partial x} \right]_{x=1} + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 \left[ \frac{\partial M(x, y)}{\partial x} \right]_{x=1} i_2(t, y) dy, \quad ( \dots )$$

の 4 個の関係、またはこれらの組合せから成る諸関係の中の独立なる 2 個の関係式でなければならない。Bewley はこの二つの条件を全く考慮していないわけである。しかしてこの増加さるべき二つの境界条件をも考慮して (VII. 52) 式中の未知量を決定しようとする、その形は不充分であることがわかる。

所で、前述の如く Bewley はこの増加さるべき二つの条件を考慮しなかつた爲に、(VII. 52) 式において (VII. 5') 及び (VII. 6) の二つだけでは  $q_n$  が未決定の儘残る結果となる故、この  $q_n$  の決定に (VII. 64) の関係を持ち出したわけであるが、このことについても一応の吟味を要する。

一体

$$\left[ \frac{\partial i_2(t, x)}{\partial x} \right]_{t=0} = 0, \quad (0 < x < 1)$$

なる関係は (VII. 37) 式の如く得られた  $F_2(\lambda, x; \xi)$  を用いて

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\partial F_2(\lambda, x; \xi)}{\partial x} = 0, \quad (0 < x < 1)$$

として容易に導かれるものであるが、これは (VII. 1), (VII. 2), (VII. 3), (VII. 46) を (VII. 5'), (VII. 6) 及び前述の増加するべき2個の境界条件の下に解いた結果から得らるべき当然の帰結であつて、問題の解を決定するには是非必要なるべき条件となつてゐるわけではない。従つて (VII. 52) 式中の未知量の決定に (VII. 64) の關係を持出した時にすでに境界条件の不足に氣附かるべき筈の所なのである。

抑々、誘導に有限な電圧を印加した直後に於いては、その誘導にはその電圧による電流が流れないと云ふことは電気工學上の簡単な常識となつてゐる所であるが、此の常識が却つて禍となつて以上の如き誤つた方法がとられるに至つたものとも考えられる。

最後に、Bewley が当前の問題の全完解なりと稱している (VII. 63) が、実はそうではないとするならば、それは如何なる境界値問題の解となつてゐるのであろうか、これを検討してみよう。

これ迄々述べた如く、当前の問題は、微分-積分方程式 (VII. 1) 乃至 (VII. 4) 及び境界条件 (VII. 5'), (VII. 6) によつて、或は微分方程式 (VII. 1), (VII. 2), (VII. 3), (VII. 46) 並に4個の境界条件 (VII. 5'), (VII. 6) 及び

$$\left[ \frac{\partial e(t, x)}{\partial x} \right]_{x=0} - \xi \left[ \frac{\partial^2 e(t, x)}{\partial x^2} \right]_{x=0} = r \left\{ i_2(t, 0) - \xi \left[ \frac{\partial i_2(t, x)}{\partial x} \right]_{x=0} \right\},$$

$$(t \geq +0), \dots\dots\dots(\text{VII. 68})$$

$$\left[ \frac{\partial e(t, x)}{\partial x} \right]_{x=1} + \xi \left[ \frac{\partial^2 e(t, x)}{\partial x^2} \right]_{x=1} = r \left\{ i_2(t, 1) + \xi \left[ \frac{\partial i_2(t, x)}{\partial x} \right]_{x=1} \right\},$$

$$(t \geq +0) \dots\dots\dots(\text{VII. 69})$$

(これらに  $D$ - $\lambda$  変換を施せば (VII. 34) 式及び (VII. 35) 式が得られる)

によつて表示されている訳である。所で今、微分方程式は上と同様に (VII. 1), (VII. 2), (VII. 3), (VII. 46) であり、境界条件は、その内2個は VII. 5'), (VII. 6) であるが、他の2個は (VII. 68), (VII. 69) とは異なる

$$\left[ \frac{\partial^2 e(t, x)}{\partial x^2} \right]_{x=0} = r \left[ \frac{\partial i_2(t, x)}{\partial x} \right]_{x=0}, \quad (t \geq +0), \dots\dots\dots(\text{VII. 70})$$

$$\left[ \frac{\partial^2 e(t, x)}{\partial x^2} \right]_{x=1} = r \left[ \frac{\partial i_2(t, x)}{\partial x} \right]_{x=1}, \quad (t \geq +0) \dots\dots\dots(\text{VII. 71})$$

である如き問題を考へてみる。しからばこの場合、(VII. 36) 式に相当して

$$F_e(\lambda, x) = \frac{E}{L\lambda(m_1^2 - m_2^2)} \left\{ m_2^2 (rm_1^2 - L\lambda) \frac{\sinh m_1 x}{\sinh m_1} - m_1^2 (rm_2^2 - L\lambda) \frac{\sinh m_2 x}{\sinh m_2} \right\}, \quad (0 < x < 1) \dots\dots\dots(\text{VII. 72})$$

が得られるが、これに (VII. 57) 式の關係を代入して少しく書き換えれば、

$$F_e(\lambda, x) = \frac{2E}{L\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^{n-1} n\pi \sin n\pi x \{ L\lambda(m_1^2 + m_2^2 + n^2\pi^2) - rm_1^2 m_2^2 \}}{(m_1^2 + n^2\pi^2)(m_2^2 + n^2\pi^2)},$$

$$(0 < x < 1) \dots\dots\dots(\text{VII. 73})$$

が導かれる。したがつてこれに対する  $e(t, x)$  は

$$e(t, x) = F_e(p, x) \cdot 1$$

$$= 2E \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^{n-1} n\pi \left\{ m_1^2(p)^2 + m_2^2(p)^2 + n^2\pi^2 - \frac{r}{Lp} m_1(p)^2 m_2(p)^2 \right\}}{(m_1(p)^2 + n^2\pi^2)(m_2(p)^2 + n^2\pi^2)} \cdot \sin n\pi x,$$

$$\left( \begin{array}{l} t \geq +0, \\ 0 < x < 1 \end{array} \right)$$

となるが、ここに於いて (VII. 39) 式及び (VII. 40) 式の関係を代入すれば

$$\begin{aligned} & \frac{m_1(p)^2 + m_2(p)^2 + n^2\pi^2 - \frac{r}{Lp} m_1(p)^2 m_2(p)^2}{(m_1(p)^2 + n^2\pi^2)(m_2(p)^2 + n^2\pi^2)} \cdot 1 \\ & \equiv \frac{1}{L(C + Kn^2\pi^2)} \frac{KLp^2 + gL + \gamma Kn^2\pi^2 p + (1 + gr)n^2\pi^2}{(p + \delta_n)^2 + \omega_n^2} \cdot 1 \\ & \equiv \frac{1}{\beta^2 + n^2\pi^2} \frac{(\alpha^2 - \beta^2)e^{-\delta_n t}}{(\alpha^2 + n^2\pi^2)(\beta^2 + n^2\pi^2)} \left\{ \cos \omega_n t + q_n \sin \omega_n t \right\}, \\ & \qquad \qquad \qquad \left( \begin{array}{l} t \geq +0, \\ 0 < x < 1 \end{array} \right) \dots\dots\dots(\text{VII. 74}) \end{aligned}$$

なる関係が得られる。故に再び (VII. 57) 式の関係を参照すれば、

$$\begin{aligned} e(t, x) &= \frac{\sinh \beta x}{\sinh \beta} E + 2(\alpha^2 - \beta^2) E \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^{n\pi} e^{-\delta_n t}}{(\alpha^2 + n^2\pi^2)(\beta^2 + n^2\pi^2)} \cdot \\ & \qquad \qquad \qquad \cdot (\cos \omega_n t + q_n \sin \omega_n t) \sin n\pi x, \left( \begin{array}{l} t \geq +0 \\ 0 < x < 1 \end{array} \right) \dots\dots\dots(\text{VII. 75}) \end{aligned}$$

となるが、これすなわち Bewley が算出した関係 (VII. 63) 式に他ならない。

この結果から Bewley は、吾々が実際に当面しているのは全く別個の問題の解を求めていたということが出来るわけである。

この事は、回路の損失を考えない場合に対しては勿論、二巻線考えた場合に対しても同様にいえるものである。

## 第 VIII 章

### 結 言

以上第 IV 篇においては Laplace 変換法を利用して拡張された演算子算法を分布定数回路解析の問題に応用して演算子算法の特長たる第一種解法の有用性を明らかにした。しかして例題としては、送電線、分圧器及び変圧器等の線路または巻線上の電位もしくは電流分布を求むる問題を取扱ひ、とくに、送電線の問題においては、従来余り計算されていなかった、解の漸近値を計算しておいた。また最後には、変圧器の内部電位振動の問題に関し従来正当であると信ぜられていた Bewley 流の数学的反撥いが誤であることが闡明せられた。

### 跋

以上に於て、第 I 篇より第 IV 篇に亘り、Heaviside 演算子法の基礎並にその応用を、従来とは少しく異なつた観点より、可成り広い範囲に論じた積りであるが、勿論これを以て演算子法の全貌を明らかにしたものと云うことはできない。同法の基礎問題に就ても、本稿執筆の途中に於いて気の附いた点が多々あるのであるが、それ等に関しては又他の機会に論ずることもあろうと考えている。又応用方面にしても、或種の積分方程式の解法、或は Fourier 級数等の応用等があるが、直接電気回路解析の問題とは関連が少いと考えられるので本稿には述べてない。是等には夫々の文献<sup>(7)</sup>を参照されたい。

要するに筆者の考えている所では、演算子法の最も大きな特長は、初期値問題の第一種解法を可能なしめる点にあり、しかしてその応用の最たるものは電気回路解析にあるのである。

拙筆に当り、重ねて本稿発表に際し、便宜を与えられた研究所長(現在技術顧問)並に常々御鞭撻と有益御功言とを賜つた更田技術部長(現在無線機部長)に深甚なる感謝の意を捧げると共に、熱心なる討論を含まれなかつた同僚諸氏に対し、此の機会に御礼申し上げる次第である。



附 録 (II)

拡張された重畳の定理と第 III 節の公式 (36) とにより、

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon^{-\frac{x}{v}\sqrt{(D+\alpha)^2-\beta^2}} \mathbf{1}\left(\frac{t}{0}\right) \\
 & \equiv \varepsilon^{-\alpha t} \varepsilon^{-\frac{x}{v}\sqrt{D^2-\beta^2}} \varepsilon^{\alpha t} \mathbf{1}\left(\frac{t}{0}\right) \\
 & \equiv \varepsilon^{-\alpha t} \frac{1}{D-\alpha} D \mathbf{1}\left(\frac{t}{x/v}\right) \left\{ 1 + \beta \frac{x}{v} \int_{x/v}^t \frac{I_1(\beta\sqrt{t^2-x^2/v^2})}{\sqrt{t^2-x^2/v^2}} dt \right\} \\
 & \equiv D^{-1} \mathbf{1}\left(\frac{t}{x/v}\right) \varepsilon^{-\alpha t} \left\{ \mathbf{1}\left(\frac{t}{x/v}\right) + 1 + \beta \frac{x}{v} \frac{I_1(\beta\sqrt{t^2-x^2/v^2})}{\sqrt{t^2-x^2/v^2}} \right\} \\
 & \equiv \mathbf{1}\left(\frac{t}{x/v}\right) \left\{ \int_{x/v}^t \varepsilon^{-\alpha t} \rho(t-x/v) dt \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + \beta \frac{x}{v} \int_{x/v}^t \varepsilon^{-\alpha t} \frac{I_1(\beta\sqrt{t^2-x^2/v^2})}{\sqrt{t^2-x^2/v^2}} dt \right\} \\
 & \equiv \mathbf{1}\left(\frac{t}{x/v}\right) \left\{ \varepsilon^{-\alpha \frac{x}{v}} + \beta \frac{x}{v} \int_{x/v}^t \varepsilon^{-\alpha t} \frac{I_1(\beta\sqrt{t^2-x^2/v^2})}{\sqrt{t^2-x^2/v^2}} dt \right\} \\
 & \equiv \mathbf{1}\left(\frac{t}{x/v}\right) B_1(t, x)
 \end{aligned}$$

なる故、再び拡張された重畳の定理により、

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{1}\left(\frac{t}{0}\right) c(t, x) \\
 & = \mathbf{1}\left(\frac{t}{x/v}\right) \left\{ \varepsilon^{-\alpha \frac{x}{v}} E(t-x/v) + \int_{x/v}^t E(t-\tau) B_1'(\tau, x) d\tau \right\}.
 \end{aligned}$$

しかるに

$$B_1'(\tau, x) = \beta \frac{x}{v} \varepsilon^{-\alpha \tau} \frac{I_1(\beta\sqrt{\tau^2-x^2/v^2})}{\sqrt{\tau^2-x^2/v^2}}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{1}\left(\frac{t}{0}\right) c(t, x) & = \mathbf{1}\left(\frac{t}{x/v}\right) \left\{ \varepsilon^{-\alpha \frac{x}{v}} E(t-x/v) \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + \beta \int_{x/v}^t E(t-\tau) \varepsilon^{-\alpha \tau} \frac{I_1(\beta\sqrt{\tau^2-x^2/v^2})}{\sqrt{\tau^2-x^2/v^2}} d\tau \right\}, \quad (x > 0)
 \end{aligned}$$

が得られる。

また、同様にして

$$\begin{aligned}
& \mathbf{1}\left(\begin{matrix} t \\ 0 \end{matrix}\right) i(t, x) \\
&= \frac{1}{vL} B_1(D) \varepsilon^{-\alpha t} \left(1 + \frac{\alpha - \beta}{D - \alpha}\right) \frac{D}{v\sqrt{D^2 - \beta^2}} \varepsilon^{-\frac{x}{v}\sqrt{D^2 - \beta^2}} \mathbf{1}\left(\begin{matrix} t \\ 0 \end{matrix}\right) \\
&= \frac{1}{vL} B_1(D) \mathbf{1}\left(\begin{matrix} t \\ x/v \end{matrix}\right) \left\{ \varepsilon^{-\alpha t} I_0(\beta\sqrt{t^2 - x^2/v^2}) \right. \\
&\quad \left. + (\alpha^2 - \beta^2) \int_{x/v}^t \varepsilon^{-\alpha\tau} I_0(\beta\sqrt{\tau^2 - x^2/v^2}) d\tau \right\} \\
&= \mathbf{1}\left(\begin{matrix} t \\ x/v \end{matrix}\right) \sqrt{\frac{G}{L}} \left\{ E(+0) \varepsilon^{-\alpha t} I_0(\beta\sqrt{t^2 - x^2/v^2}) \right. \\
&\quad \left. + \int_{x/v}^t \left[ \frac{G}{C} E(t-\tau) + E'(t-\tau) \right] \varepsilon^{-\alpha\tau} I_0(\beta\sqrt{\tau^2 - x^2/v^2}) d\tau \right\}, \\
& \hspace{20em} (x > 0)
\end{aligned}$$

が求められる。

### 附 録 (III)

(VII. 12), (VII. 13) 及び (VII. 16) により,

$$\begin{aligned}
F_{n-2}(\lambda) &= 2a F_{n-1}(\lambda), \\
F_{n-3}(\lambda) &= 2a F_{n-2}(\lambda) - F_{n-1}(\lambda), \\
F_{n-4}(\lambda) &= 2a F_{n-3}(\lambda) - F_{n-2}(\lambda), \\
&\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots \\
F_1(\lambda) &= 2a F_2(\lambda) - F_3(\lambda), \\
F_0(\lambda) &= 2a F_1(\lambda) - F_2(\lambda)
\end{aligned}$$

であるから,

$$\left. \begin{aligned}
F_{n-3}(\lambda) &= \{(2a)^2 - 1\} F_{n-1}(\lambda), \\
F_{n-4}(\lambda) &= \{(2a)^3 - 2(2a)\} F_{n-1}(\lambda), \\
F_{n-5}(\lambda) &= \{(2a)^4 - 3(2a)^2 + 1\} F_{n-1}(\lambda), \\
&\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A. 1)$$

となる。従つて一般には

$$\begin{aligned}
F_m(\lambda) &= \{ (2a)^{n-m-1} + f_1(m)(2a)^{n-m-3} + f_2(m)(2a)^{n-m-5} + \dots \} F_{n-1}(\lambda), \\
& \hspace{15em} (m = 0, 1, 2, \dots, n-1) \dots\dots (A. 2)
\end{aligned}$$

と書ける。ここに  $f_k(m)$  は次の如くして定められる  $m$  の函数である。

先ず (A. 2) において  $m=0$  とおけば

$$F_0(\lambda) = \{(2a)^{n-1} + f_1(0)(2a)^{n-3} + f_2(0)(2a)^{n-5} + \dots\} F_{n-1}(\lambda) \dots \dots \dots (A. 3)$$

となるが, (A. 2) 及び (A. 3) より  $F_{n-1}(\lambda)$  を消去すれば

$$F_m(\lambda) = \frac{(2a)^{n-m-1} + f_1(m)(2a)^{n-m-3} + f_2(m)(2a)^{n-m-5} + \dots}{(2a)^{n-1} + f_1(0)(2a)^{n-3} + f_2(0)(2a)^{n-5} + \dots} F_0(\lambda) \dots \dots (A. 4)$$

となる. これを

$$F_m(\lambda) = 2a F_{m+1}(\lambda) - F_{m+2}(\lambda), \quad (m=0, 1, 2, \dots, n-2)$$

に代入すると

$$\begin{aligned} & (2a)^{n-m-1} + f_1(m)(2a)^{n-m-3} + f_2(m)(2a)^{n-m-5} + \dots \\ & = (2a)^{n-m-1} + \{f_1(m+1) - 1\}(2a)^{n-m-3} + \{f_2(m+1) - f_1(m+2)\}(2a)^{n-m-5} + \dots \end{aligned}$$

が得られる. よつて

$$\left. \begin{aligned} f_1(m) &= f_1(m+1) - 1, \\ f_2(m) &= f_2(m+1) - f_1(m+2), \\ f_3(m) &= f_3(m+1) - f_2(m+2), \\ &\dots \dots \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (A. 5)$$

となる.

先ず  $f_1(m)$  を決定するに

$$\begin{aligned} f_1(0) &= f_1(1) - 1, \\ f_1(1) &= f_1(2) - 1, \\ &\dots \dots \dots \\ f_1(m-1) &= f_1(m) - 1 \end{aligned}$$

であるから, これらの式を辺々相加えれば

$$f_1(m) - m + f_1(0) \dots \dots \dots (A. 6)$$

となる. しかるに, (A. 1)の最初の式と (A. 2) 式とより

$$f_1(n-3) = -1$$

であるが, 一方また, (A. 6)式において  $m=n-3$  とおけば

$$f_1(n-3) = n-3 + f_1(0)$$

であるから

$$f_1(0) = -n+2.$$

よつて

$$f_1(m) = -(n-m-2), \quad (m=0, 1, 2, \dots, n-2) \dots \dots \dots (A. 7)$$

となる.

次に、(A. 7) の関係を (A. 5) の算式に代入すれば

$$f_2'(m) = f_2(m+1) + (n+m-4)$$

となるが、 $f_1(m)$  を決定したと同様の方法によつて

$$f_2(m) = \frac{1}{2}(n-m-3)(n-m-4), \quad (m=0, 1, 2, \dots, n-3) \dots\dots\dots(A. 8)$$

が得られる。

しかし一般に

$$f_k(m) = (-)^k \frac{(n-m-k-1)(n-m-k-2)\dots(n-m-2k)}{k!}$$

とおいてみる。

$$\begin{aligned} f_k(m+1) - f_{k-1}(m+2) &= (-)^k \left\{ \frac{(n-m-k-2)(n-m-k-3)\dots(n-m-1-2k)}{k!} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(n-m-k-2)(n-m-k-3)\dots(n-m-2k)}{(k-1)!} \right\} \\ &= \frac{(-)^k}{k!} (n-m-k-1)(n-m-k-2)\dots(n-m-2k) \\ &= f_k(m) \end{aligned}$$

となる。したがつて数学的帰納法によつて

$$F_m(\lambda) = \frac{G(n-m, \lambda)}{G(n, \lambda)} F_0(\lambda)$$

となることがわかる。ここに

$$\begin{aligned} G(n, \lambda) &= (2a)^{n-1} - (n-2)(2a)^{n-2} + \dots \\ &\quad + (-)^k \frac{(n-k-1)(n-k-2)\dots(n-2k)}{k!} (2a)^{n-2k-1} + \dots \end{aligned}$$

である。しかるに三角恒等式によれば、

$$\begin{aligned} \frac{\sinh n\theta}{\sinh \theta} &= (2\cosh \theta)^{n-1} - (n-2)(2\cosh \theta)^{n-2} + \dots \\ &\quad + (-)^k \frac{(n-k-1)(n-k-2)\dots(n-2k)}{k!} (2\cosh \theta)^{n-2k-1} + \dots \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{G(n-m, \lambda)}{G(n, \lambda)} &= \frac{\sinh(n-m)\theta}{\sinh \theta}, \\ \cosh \theta &= a \end{aligned}$$

と書けるのである。

附 録 (VI)

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k(m)}{a(p) - a_k} \cdot 1 \\
 & \equiv \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k(m)}{\cosh \theta(p) - \cosh \theta_k} \cdot 1 \\
 & \equiv \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k(m)}{1 + \frac{CR\rho}{2(1+KR\rho)} - \cos \frac{k\pi}{n}} \cdot 1 \\
 & \equiv \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2A_k(m)}{GR \left( 1 + \frac{4K}{C} \sin^2 \frac{k\pi}{2n} \right)} \frac{1+KR\rho}{\rho + \gamma_k} \cdot 1 \\
 & \equiv \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k(m)}{2\sin^2 \frac{k\pi}{2n}} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k(m)}{2 \left( 1 + \frac{4K}{C} \sin^2 \frac{k\pi}{2n} \right)} \frac{\varepsilon^{-\gamma_k l}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n}} \\
 & \equiv \frac{n-m}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k(m) \varepsilon^{-\gamma_k l}}{2 \left( 1 + \frac{4K}{C} \sin^2 \frac{k\pi}{2n} \right) \sin^2 \frac{k\pi}{2n}} \cdot
 \end{aligned}$$

しかして

$$\begin{aligned}
 A_k(m) &= \lim_{a \rightarrow a_k} (a - a_k) \frac{\sinh(n-m)\theta}{\sinh n\theta} \\
 & \equiv \lim_{\theta \rightarrow \theta_k} (\cosh \theta - \cosh \theta_k) \frac{\sinh(n-m)\theta}{\sinh n\theta} \\
 & \equiv \sin(n-m) \frac{k\pi}{n} \lim_{\theta \rightarrow \theta_k} \frac{\cosh \theta - \cosh \theta_k}{\sinh n\theta} \\
 & \equiv \sin(n-m) \frac{k\pi}{n} \frac{\sin \frac{k\pi}{n}}{n \cos \frac{k\pi}{n}} \\
 & \equiv (-)^k \frac{2}{n} \sin \frac{k\pi}{2n} \cos \frac{k\pi}{2n} \sin(n-m) \frac{k\pi}{n}
 \end{aligned}$$

なるゆゑ

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k(m)}{a(p) - a_k} \cdot 1 \\
 & \equiv \frac{n-m}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-)^k}{n} \frac{\cot \frac{k\pi}{n} \sin \frac{n-m}{n} \frac{k\pi}{n}}{1 + \frac{4K}{C} \sin^2 \frac{k\pi}{2n}} \varepsilon^{-\gamma_k l}
 \end{aligned}$$

となる。

# Heaviside 演算子法に対する新しい 考察とその電気回路解析における応用

## 総目次

「三菱電機」掲載号

第一篇	(I) 一般的考察	18巻2号
	(II) N-法の基礎	18巻4号
	(III) D及びD <sup>-1</sup> に関する主なる性質	18巻5号
	(IV) p及びp <sup>-1</sup> に関する主なる性質	〃
	(V) 微分方程式の一般解を求むる記号的方法	18巻7号
	(VI) 単位函数 $1\left(\begin{smallmatrix} t \\ a \end{smallmatrix}\right) (\equiv 1\left(\begin{smallmatrix} t-a \\ 0 \end{smallmatrix}\right))$	18巻8号
	(VII) $\delta$ -函数(衝撃函数)と $\rho$ -函数	〃
	(VIII) 結 言	〃
第二篇	集中定数回路解析への応用	18巻10号
	第一章 初期値問題と電気回路解析	〃
	第二章 第一種初期値問題解法の基礎	〃
	第三章 微分方程式の作成に関する注意	〃
	第四章 第一種初期値問題の演算子解法(第一法—D-p変換)	〃
	第五章 第一法による計算例	18巻12号
	第六章 第一種初期値問題の演算子解法(第二法—単位函数の利用)	19巻6号
	第七章 第二法による計算例	〃
	第八章 第一種初期値より第二種初期値の算出	〃
	第九章 結 言	〃
第三篇	Laplace 変換による演算子法の拡張	19巻9号
	第一章 Laplace 変換	〃
	第二章 演算子法の拡張	〃
	第三章 拡張された演算子算法	〃
	第四章 漸近展開の演算子法的取扱い	19巻11号
	第五章 Laplace 変換に対する再考察	〃
	第六章 種々の計算例	〃
	第七章 結 言	〃
第四篇	分布定数回路解析への応用	21巻1号
	第一章 準線型偏微分方程式の演算子解法	〃
	第二章 二線並行送電線に関する基本式	21巻3号
	第三章 無限長送電線	〃
	第四章 半無限長送電線 $\left(\frac{1}{2}\right)$	21巻5号
	第四章 半無限長送電線 $\left(\frac{2}{2}\right)$	22巻3号
	第五章 有限長送電線	22巻4号
	第五章 有限長送電線(続)	23巻6号
	第六章 抵抗—容量分圧器	23巻7号
	第七章 変圧器巻線上の進行波	23巻8号
	〃 (続)	26巻3号
	第八章 結 言	〃