



三菱電機

第 19 卷

昭和 18 年 11 月

第 11 號

内 容 目 次

アルミニウム 導体の電弧溶接	和 田 六 郎	373 (1)
最近の小型 デायオン 遮断器に就て	篠 崎 善 助	379 (7)
送油式變壓器用電動油 ポンプ	高 桑 常 信	383 (11)
Heaviside 演算子法に對する新しい 考察とその電氣回路に於ける應用 (X)	菅 野 正 雄	386 (14)

三菱電機株式會社

三菱磁氣着具

川 村 治

内 容 梗 概

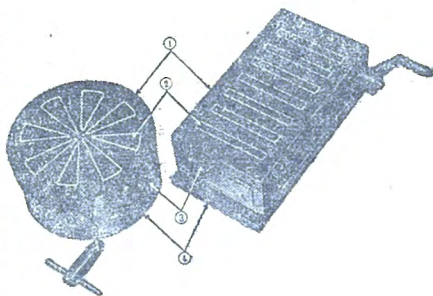
精密工作機械の増産の時に當り使用激増の着具に對し新製品たる磁石着具の構造、特徴を述べ従来の電磁式と比較してその勝れる所以を説明した。

1. 緒 言

従來電磁式着具は一般生産部門及び各種工作物に於て其の取扱の簡便その他の利點により種々難解なる工作上の問題を容易に解決し、能率上、精密作業上缺く可からざる工作器具である事は論を俟たぬ處であるが、近時銅資源の節約、真空管の入手困難の爲永久磁石による差具が使用せられるに至り茲に電磁式と比較して幾多の利點を有する本着具の構造、特徴その他を略記する次第である。

2. 構 造

本着具は酸化金屬磁石を裝備し吸着力たる磁束は平均不變且永久のものである。第2圖に示す如く極片が遮磁片の間にある時は磁力線は吸着物を通過して強固に之を把持し着具側面にあるハンドルを動かせば磁石箱を滑動せしめて磁力は短絡し吸着物を離さしめる。磁石箱を偏心に接せしめるカム及びハンドル部は只本器の消耗部にして組立の際充分なるグリスを以て封緘しある故、長期間手入を必要とせず、第3、4、5圖は本器の磁石箱を示したもので第3圖は磁石が獨立にして磁力線は磁力も交互に挿入してある極板を通り表面に出る構造にして角型着具に利用せられる。第4圖は磁石を箱全体に詰め上部極板は下駄の齒の形狀にして品物を吸着する時は、齒の部が天板の遮磁片の間に移動し吸着する構造にて丸型着具に應用せられる。第5圖は第4圖に示せると同型式にして磁石の間に縦に極



第 1 圖 磁石函切替裝置

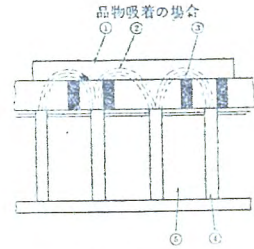
板を挿入N極は下にS極は上に出、N極は外面を通り天板に出る方法にして角型着具の表面のピッチ小刻みにして主として小物を吸着せしめる着具に用いる構造である。

3. 特 徴

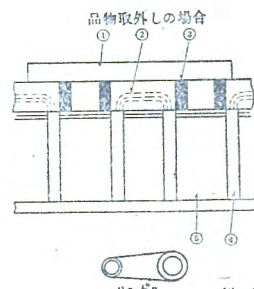
従來の電磁式に比較し對熱の問題が本着具では完全に除去され且電源不必要と云ふ大きい特徴があるが、兩着具の特性を比較すると第1表に示す如くである。

4. 結 言

磁氣着具は従來の電磁式着具に代り使用せられるに至つたが帶熱、電源の問題が本着具では絶無にして其の特徴も廣く認められる所となり需要も益々増加の傾向にある。



第 2 圖 A

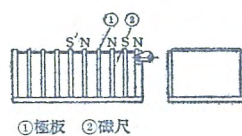


第 2 圖 B

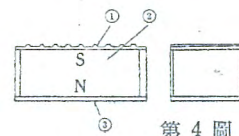
第 1 表

電 磁 式 着 具	三 菱 磁 石 着 具
1. 吸引力を誘發するに直流電源を必要とする イ) 運轉維持費必要 ロ) 電源に發電機又は整流器必要 ハ) 電源故障の場合吸引力が急に零となり加工物が飛散し危険 ニ) 着具に電力を供給する爲コード又はブラシ必要 ホ) コード又はブラシに依る故障起りたる場合は(ハ)と同様危険 ヘ) 研磨する場合絶えず水又は油を使用する爲電磁コイルに故障起り易し	1. 永久磁石である酸化金屬磁石を使用してゐる爲電源必要とせず イ) 従つて維持費皆無 ロ) 全然必要なし ハ) 他動的に切替ねば吸引力が無くなり又は弱る事はない故安全 ニ) 不必要 ホ) 危険無しへ水及び油に對して絶對安全故障の心配無し
2. 電磁線輪の爲着具自身帶熱する	2. 全然帶熱せず
3. 着具面は上記の熱の爲彎曲した状態にて研磨する故精度惡し	3. 従つて加工物の精度良し
4. 回轉型着具の場合加工物の蕊を取り付ける必要有るがその場合磁力の調節困難	4. 吸引力は何如様にも調整可能
5. 短絡又は溫度上昇の爲磁力減退する事有り	5. 酸化金屬磁石は他の永久磁石に比し磁力減退ぬ事特徴なる故減退の心配なし

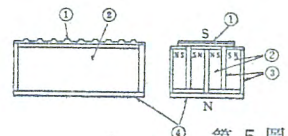
磁 石 函 内 部 構 造



第 3 圖



第 4 圖



第 5 圖

アルミニウム自体の物理的・化学的性質に起因する。就中比熱及熱伝導率が大であつて、熔接熱の局部集中を困難ならしむること及極めて酸化され易く、且生じたる酸化アルミニウムは熔融點高く強靱であり、熔解金屬を包被して熔着金屬相互の融合を阻止し、又比重大にして熔着金屬に混入する等の悪い條件を有してゐることである。

第1表は純度99.5%アルミニウムの物理的性質を、第2表に同じく機械的性質を示す。

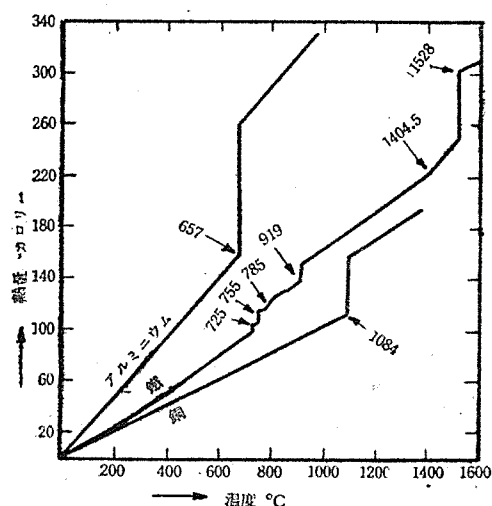
アルミ材の機械的諸性質は、純度、加工、焼鈍等により異なるものであつて、第2表は純度99.5%のものゝ大略の性質を示して居る。

アルミ材の比熱の點に就いて考察して見るに、アルミ材は其の熔解點658°Cに加熱するのに160calを要し、鐵或は銅を同じ温度に加熱するのに要する熱量に比して遙に大である。更に熔解潜熱も亦、鐵の49.35cal/g、銅の50.01cal/gに對し、アルミ材は93.96cal/gであつて甚だ大である。第1圖は加熱熔解に要する熱量に就き鐵、銅との比較を示す線圖である。斯様にしてアルミ材を熔解せしむる爲には、その熔解點が低いにも不拘、鐵又は銅に比して、多量の熱を必要とすることが了解せられる。

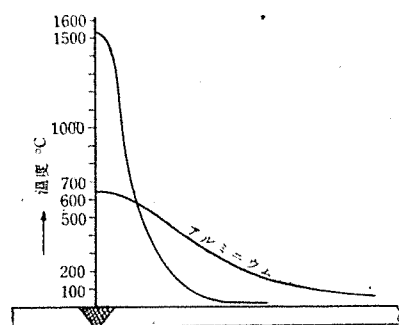
更にアルミ材の熱伝導度は、鐵の0.08~0.13cal/cms°Cに對して0.51~0.53cal/cms°Cであるから、之が爲に母材に加へられた熱は廣く周圍に傳導し去り、加熱を局部に制限することが出来ない。従つて更に大なる熱量を要する結果になる。熔接の際の温度分布の状態を、鐵の場合と比較すると、第2圖の如き状態となる。

その反面アルミ材は、熔解點が低く一度熔解が始ると熔解の範圍が大きく、必要なる一小局部のみを自由に任意に熔解せしむると云ふ鐵の熔接の場合の如き制御が困難となる。これを要するにアルミ材は多量の熱量を要して熔解し難く、熔解し始めると急に熔け過ぎになると云ふ、熔接の操作の上から云つて、好ましからざる性質を有してゐる。

アルミニウムは極めて酸化し易い金屬であつて、常温に於て已に酸化せられ、表面は酸化皮膜を以て覆れてゐるが、熔解温度附近では、酸化は特に甚だしい。酸化アル



第1圖



第2圖

ミニウム 即ちアルミナは、その熔融點2760°Cであり熔接温度にては熔解せず、熔融金屬の表面に強靱なる膜を形成し、熔着金屬と母材の融合を阻止し、熔接を不可能にする。又これを機械的に破碎しても、その比重はアルミニウムの比重よりも大きいから、熔着金屬内部に混入して、熔接部の性質を劣化せしめるので、是非適當な熔劑を使用して、化学的にこれを除去することが必要である。之れ即ちアルミニウムの熔接に熔劑が必須とされる所以であつて、熔劑の良否が熔接の結果を左右すると云ふことが出来る。

第2表 純度99.5%アルミニウムの機械的性質

			鋳 物	壓 延 鈍 機	壓 延 機
抗 張 力	kg/mm ²		9~12	7~9	13~18
降 伏 點	"		3~4	3~4	12~17
伸 率	%		25~18	35~25	7~3
断面收縮率	"		40~55	80~95	60~85
ブリネル硬度	(5/62.5/30)	Kg/mm ²	74~32	15~24	30~40
衝 撃 値		mkg/cm ²		4	
剪 斷 抗 力		kg/mm ²		4~8	11~16
弾 性 率				6000~7000	
エリクセン値	0.5mm	mm		9.0	
	1.0 "	"		10.4	
	2.0 "	"		12.5	

4 熔 接 棒

アルミニウムの熔接には、前項に述べた通り根本的に困難なる点があるが、特に電弧熔接の発達普及の遅れた原因は、優秀なる被覆熔接棒の缺除せる點に歸するものと考へられる。

熔接棒被覆剤の機能は單に酸化アルミニウムの除去を目的とせる瓦斯熔接用熔剤のみではなく、次の如き複雑なる性能を要求して居る。

- (ア) 熱イオン發生の高い物質を含むことに依り電弧を安定せしめる。
- (イ) 被覆剤は棒の先端に於て、第3圖の如き筒狀を形成し、電弧を集中せしめ、飛散金屬を少なからしめる。
- (ウ) 被覆剤によつて發生せる「ガス」或は、熔剤によつて電弧を空氣の接觸より遮蔽する。
- (エ) 酸化アルミニウムと化學的に反應して例へば AlCl_3 の如き化合物たらしめて、速に除去せしめる。
- (オ) 熔込み及び熔接棒の熔解速度を適度ならしめる。
- (カ) 熔剤の表面張力、脆弱性、多孔性を適度にし熔着金屬表面の波形を良好ならしめる。
- (キ) 熔滓は熔着金屬表面を被覆し、之を保護しつつ冷却速度を緩ならしめ、有害ガスの放出を容易ならしめる。

被覆熔接棒の市販品は極めて少いのみならず、前述の要求を満足せしむるに足るものは更に少い。

被覆剤に就いての文献も亦甚だ少い。岡本博士の研究に依れば第3表1及2如きものが結果良好と稱されてゐる。

當所に於ては、種々試作研究の結果第3表3の成分の被覆剤が良好と認め、之を使用してゐる。

熔接棒芯線は、これによつて得られる熔着金屬が母材と均質的なるを理想とする見地から、母材と同等以上の純度をたふべきことが必要であつて、導体用アルミ材の純度は、99.3%以上であるから99.5%以上の純度が望ましい。アルミ材の熔接には時として、(5~10%)珪素を含む合金線の芯線が推奨せられることがあるが、導体の熔接には、なるべく純アルミ線を可と考へる。珪素合金は純アルミニウムよりも熔融點低く、熔解金屬の流動性もよく、又凝固收縮が小さいので龜裂の發生も少いと稱せられて居るが、電氣的性質並に耐蝕性に就いては、好ましくなく、寧ろ、アルミ合金の熔接棒として適してゐる。

5 熔 接 機 械

アルミ材の熔接に於ては、熔接棒の熔融速度が極めて早いので、電弧長の變化が甚だしく、従つて電弧の安定度の極めて良好な裝置を必要とする。

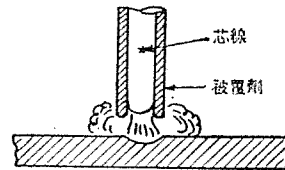
熔接機としては、直流が電弧の安定度良好であり、操作も容易であるので、直流電弧熔接機が使用せられる。三菱式フレックス直流電弧熔接機 250A 或は 300A は何れにてもその儘使用出来る。

母材が薄くなり従つて電流が小となり、開路電壓が

50V以下になると、電弧の安定が不良となるが、かかる場合には、熔接回路に直列抵抗を挿入して、開路電壓を高くし、電弧をよりよく安定ならしむることが出来る。

(第4圖)

交流熔接機に於ても、開路電壓を 250~300V の如く特別高くし、これに高周波を併用すれば使用可能であると報告されてゐる。第4表は銜合熔接の場合に於ける板の厚さとこれに適當なる熔接棒徑並に電弧電流とを示す



第 3 圖

第 3 表

	水晶石 (%)	鹽化カリ (%)	食鹽 (%)	鹽化リチウム (%)	炭酸ソーダ (%)
1	50	50	—	—	—
2	24	38	38	—	—
3	47	20	20	12	6

6 アルミ材の接手

アルミ材の熔接々手には、銜合熔接が最も作業が容易で且完全なる結果が得られるので、之が設計には能ふ限り銜合接手を採用すべきである。而して眞に已むを得ない場合の外は他の形の接手を採用してはならない。然し他の形の接手、例へば角接手、T接手の如きものも可能であり、T接手の如きはガス熔接の場合に比すれば遙に容易と云ふことが出来る。

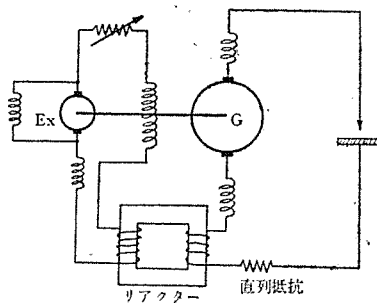
第5圖は導体の熔接ではないが、アルミ厚板のT型接手の一例として示したものである。之は點熔接機の機枠であつてアルミ鑄物と厚さ12mmのアルミ板とを熔接により組立てたものである。接手の開先の形狀は、第5表に之を示す。

7 熔 接 の 操 作

アルミ材の電弧熔接の操作に於て、他の金屬の熔接と異なる點は、豫熱を要することである。板厚5mm以上の熔接にはガス吹管或は炭素電弧を以て、凡そ180°C附近に加熱することが必要である。5mm以下の板厚の場合でも熔接始めの部分を加熱することは、熔接の開始を容易ならしめる利點がある。

加熱温度が高過れば、熔接電流は大き過ぎることになり母材の熔け過ぎを來たす。この豫熱温度を適當ならしめることは作業上重要な問題であるから、實地作業に當つては、初め計測してその程度を経験し、實地に覚えなければならぬ。アルミ材の熔接の困難さは此處にも存在する。

アルミ材は、その熔接始めに於ては熱の集積が小なる爲め電弧が發生し難く、熔け込みが不十分になり易い。この點を補正する爲に豫熱を必要とするのであるが、尙熔接始めには、熔接電流を特に大ならしめる様、熔接回



第 4 圖

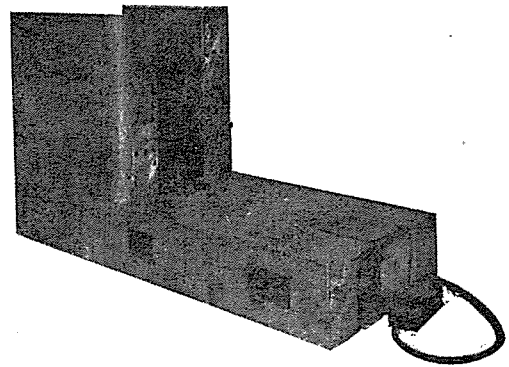
第 4 表

板 厚 m/m	熔接棒径 m/m	電弧電流 AmP
2	3	55 ~ 65
3	3~4	65 ~ 75
4	4~5	75 ~ 100
5	5~6	100 ~ 125
6	6	125 ~ 180
9	6	180 ~ 250
12	6~8	250 ~ 300
16	6~8	300 ~ 350

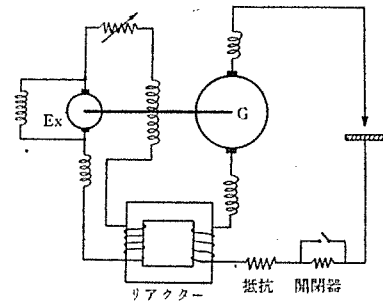
路に第 6 圖の如き抵抗を入れ、熔接頭初はこれを短絡して特に大電流を流し、母材の熔込みが適度になれば、開閉器を開いて直列抵抗を生かし、普通の熔接電流値に戻す如くするのも一方法である。

熔接に當つては、母材の膨脹、熔着金屬の凝固收縮による變形異動の防止の爲、豫め假付けを行ふか適當なる熔接厘、締付金具を使用して、緊定することが必要であるが、假付は鐵の場合の如く容易ではないので成る可く締付具を使用して歪の發生を抑制し、出來上りを正確とならしめる。I 型、V 型の衝合熔接に於ては特に裏まで透徹せる熔接が得られる様裏當てを使用すると便利であり、裏當の材料には鐵板或はアスベスト板が適當である。尙裏當てには第 7 圖に示す如く溝を附けて置くと、右圖に示す如く裏面にも補強盛りせる熔接が得られる。

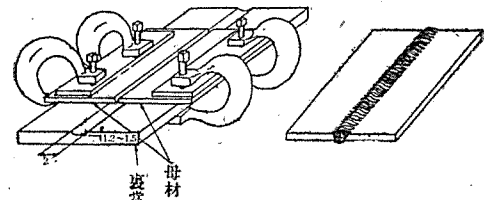
熔接操作の要領としては、電弧をなるべく短く保持し



第 5 圖



第 6 圖



第 7 圖

て、空氣との接觸を少からしめ、且その混入を防止し、熔接棒の先端に生ずる熔球が過大とならぬ内に母材に移行せしめる様にすることが肝要である。

母材の熔解は前述の如く軟鋼熔接の場合よりも多量に生ずるから、熔接棒に波状運動を與へることは一般に必要でない。

熔接棒は熔接面に直角に保ち直線的に熔接線に沿ふて進行せしめる。厚板に於て熔接幅が大きく、母材の熔解が全幅に亘らない様な場合には少しく波状運動が必要である。

8 熔接の成績

第 8 圖は、厚さ 8mm 幅 380mm の導体用 アルミ 板の V 型熔接を示す。この熔接の要領は第 6 圖に示す如く緊定し アセチレン 火焰を用ひて約 180°C に豫熱を行ひ、熔接棒は 6mmφ の芯線に當所製熔劑を塗布せるものを使用した。熔接電流は 180A、電弧電壓は約 27V である。

接手名稱	板 原	接手型	開先形狀
衝 合	3 % 以下	I 型	
	3 ~ 12 %	V 型	
	12 % 以上	X 型	
角			
T			

第9圖は、第7圖の要領で溶接した 8000kVA の變壓器の低壓側線輪である。

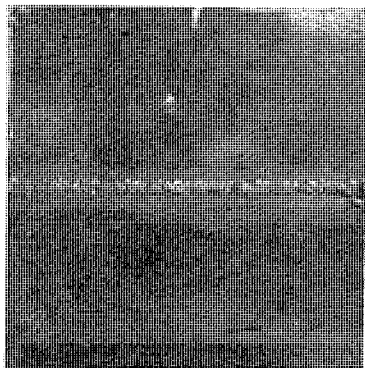
第8圖に示した試料より、第10圖の如き試験片を採り、その抗張試験及曲試験を行つた結果は、第6表の如くである。曲試験は直径 6mm の當金を以てローラー曲げを施行した。

アルミ材の溶接部の強度は、溶接によつて母材が焼鈍されるから、軟アルミの強度が低下することはさげられない。

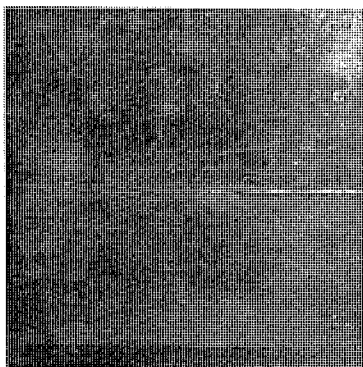
又同じ試料より、第11圖の如き試片を採取し、同圖右に示す如き方法で、溶接部の電氣抵抗を母材の等價長を以て示した結果は、第7表の通りである。

母材に及ぼす熱影響は、その硬度變化に依つて知ることが出来る。第12圖は 6mm 板厚の衝合溶接の電弧溶接の場合と、ガス溶接の場合との熱影響の比較を示したものである。

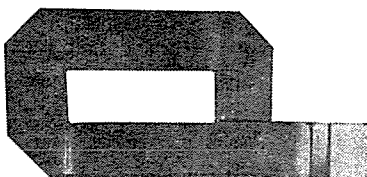
溶接部は、母材と熔着金属との融合境界に隣して、母材部に結晶粒子の粗大に成長した部分があり、之に續いて微粒結晶が見られる。この微粒結晶界域は加熱が丁度母材の再結晶溫度に達した部分であつて、粗粒界域はこれより高温に加熱された部分である。



第8圖 表面



第8圖 裏面



第9圖

熔着金属は鑄造組織であるから、槌打してこれを破壊すれば、機械的性質を改善することが出来る。然しこの場合加工硬化を來すから過度にならぬ様注意を要する。

第16圖は、第8圖に於ける試料に於て、第15圖の如く盛上りを母材と同じ高さに槌打した場合のマクロ寫眞であり、第17圖は同じく第16圖のマクロに示す各位置の顯微鏡寫眞である。

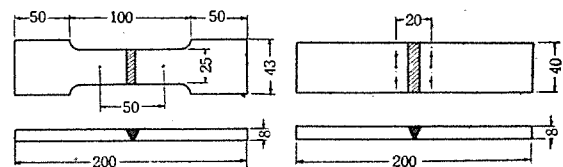
第8表は、之等の抗張試験結果を示したものである。槌打したものは、熔着部の強度が増加してゐるのは、破斷位置の變更に依りて認められる。

槌打したものを更に 250°C で焼鈍すると、更に良い結果を示す。

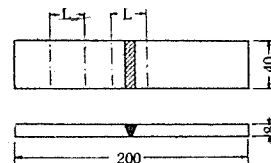
第18圖及第19圖は、上述の抗張並に曲試験施行後の試片を示せるものである。

9 アルミ材の溶接部の腐蝕

溶接後水洗ひして、熔剤の殘留を除去すべきことは、ガス溶接と同様である。水洗ひが不充分であれば、鹽化物、弗化物等の腐蝕物が殘存する爲、腐蝕せられる原因となる。完全に水洗ひせられた接溶部の腐蝕は、實用上殆んど問題とするに足りない。之に就いては、岡本教授の實驗報告がある。



第10圖



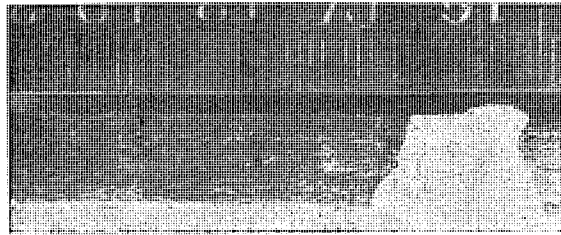
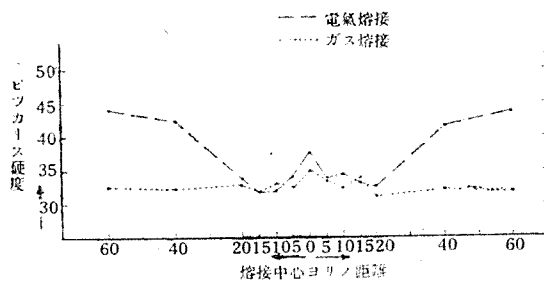
第11圖

第6表

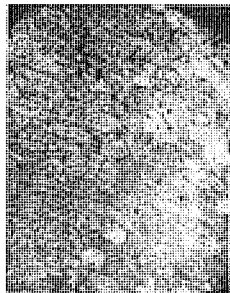
試片	抗張試験			曲試験	
	抗張力 kg/mm ²	伸率% (50)	切斷個所	曲角度	伸率% (20)
母材 No. 1	11.5	14	—		
母材 No. 2	12.5	14	—		
溶接材 No. 1	8.25	14	溶接部 全上		
溶接材 No. 2	8.37	20			
溶接材 No. 1				90°	23
溶接材 No. 2				95°	25

第7表 アルミ溶接材の電氣抵抗

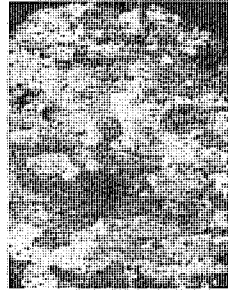
L m/m	A amp	R ohm	Ro ohm	l m/m
40	200	0.50 × 10 ⁻⁵	0.49 × 10 ⁻⁵	0.816
//	300	0.47 × //	0.46 × //	0.869
60	200	0.74 × 10 ⁻⁵	0.73 × 10 ⁻⁵	0.822
//	300	0.67 × //	0.66 × //	0.909



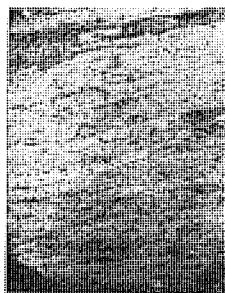
第 13 圖 溶接部マクロ写真



a



b

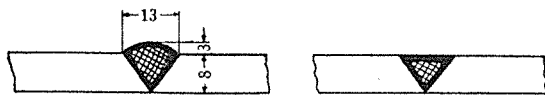


第 14 圖
13圖各位置の顕微
鏡写真倍率25

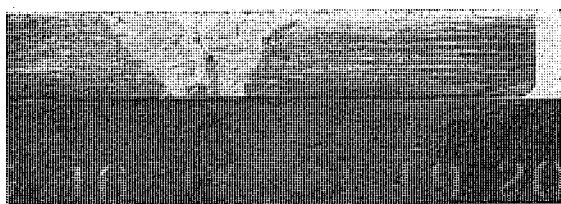
c

第 8 表

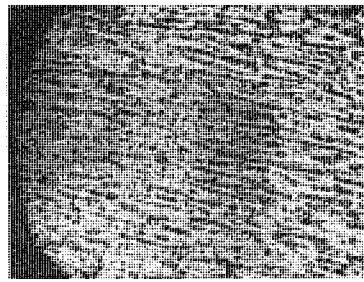
試 片	抗 張 力 kg/mm ²	伸 率 % (50)	切斷個所
ピーニング 施行 セルモノ	8.85	22.0	溶接二番
全 上	8.95	16.0	全上
ピーニング並焼鈍セルモノ	8.95	26.0	母 材 部
全 上	8.85	26.0	全上



第 15 圖

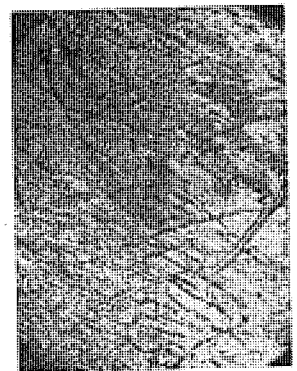


第 16 圖



第 17 圖

a

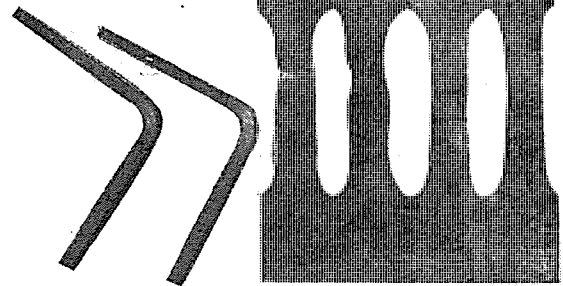


b

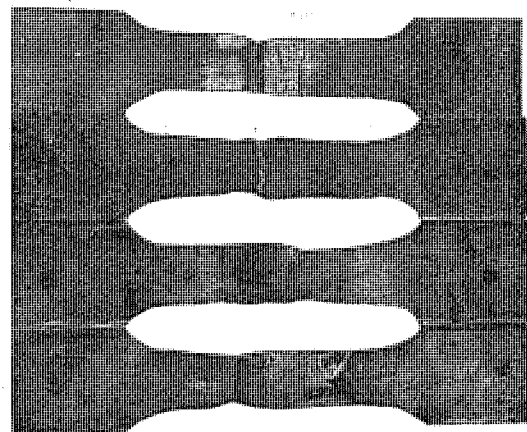
率 倍 25

母 材 溶接のまま

溶接のまま



第 18 圖



ピーニング

ピーニング
焼 鈍

第 19 圖

10 結 言

以上 アルミ 導体の電弧溶接方法に就て略述したが、此の方法は ガス 溶接に比して、作業も早く、特に厚 アルミ材の溶接には、ガス 溶接の追隨を許さない。

現在之が實用化されないのは、多分優秀な被覆溶接棒の缺除してゐる爲と思ふ。アルミ材の使用が増大すれば必ず本法が普及採用せられ、それは鐵の場合に於けると同様、電弧溶接の分野は、ガス 溶接とその位置を顛倒するに至るものと考へる。

尙本法の要領は、シルミン 或は チュアルミン の電弧溶接に應用し得ることを附言する。

参 考 文 献

1. 大西 巖著 「輕金屬及び合金の溶接」
2. 全 上 「輕合金の溶接鑢接及其他の溶接」
3. 星野茂雄著 「輕合金の溶接法」

最近の小型デアイオン遮断器に就て

篠崎善助

内容梗概

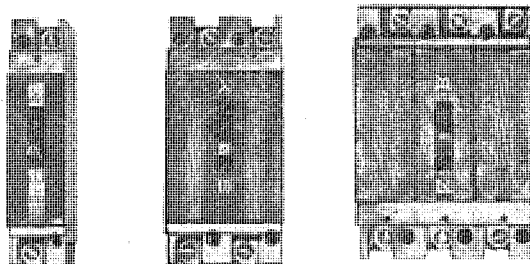
茲に紹介した分電盤用デアイオン遮断器のうち分岐回路に使用した遮断器の改良型及び変圧器用遮断器につきその大要を述べ併せて此の種遮断器に設けた熱動繼電器用バイメタルにつき紹介した。

I 緒言

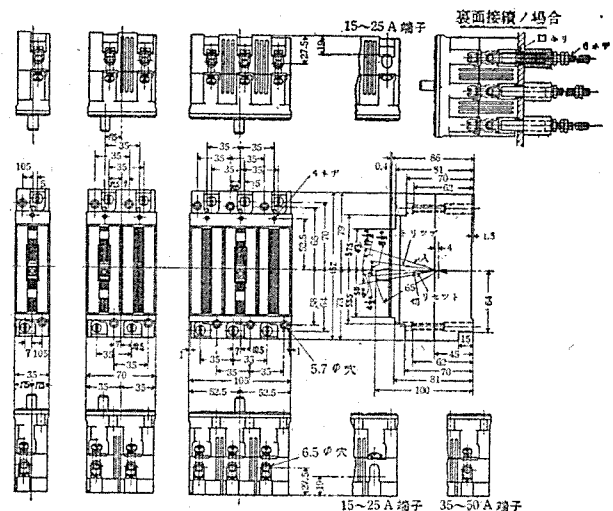
NF 型 ノーフューズ分電盤に使用した遮断器は、分岐回路用50A定格、主回路用100A、及び225Aの3種であるが、主回路用遮断器は分電盤に限らず一般工業方面に電動機の起動開閉器として広く應用してゐるに反し、分岐回路用遮断器は誕生以來十年に近い歳月を経、各方面に好評を得て居るが、分電盤構成単位として特に便利な構造とした爲に、一般向としては取付方法に多少不便な構造となり、應用の範圍が割合に狭かつた。今度使用実績から得た経験と、新しい工作技術とに基き、デアイオン消弧装置の優れた性能を有し外觀は勿論内容的にも非常に斬新なNF-50型遮断器を作つた。之は250V、50Aの遮断器で表面配線も裏面配線も出来、分電盤分岐遮断器としては勿論電動機の起動開閉器にも應用し得るものである。本文に於てはNF-50型遮断器の改良諸點を紹介し、尙NF型遮断器の應用品たるNT型變壓器用遮断器の大要を述べ、更にこの種遮断器に設けた熱動繼電器の性能を左右するバイメタルの特性及び選定の概略にも觸れることにした。

II NF-50型デアイオン遮断器

第1圖は單極、2極及び3極NF-50型デアイオン遮断器の外觀で、第2圖は外形寸法圖、第3圖は3極遮断器の断面を示す。その構造は舊型同様耐熱成型物にて圍まれた、早入早切式開閉機構と熱動繼電器とを具へた手動操作の遮断器である。定格は250V、10A、15A、20A、25A、30A及び50Aの6種で、定格電流に應じ夫々バイメタルの構造を變へて居る。尙特殊の加熱子を用ふれば、10A以下の定格電流のものも作ることが出来る。開閉機構は作動中性線を往復するバネの力に依て接觸子の開閉を行はしめる。接觸子には耐電弧の特殊合金の組合せを

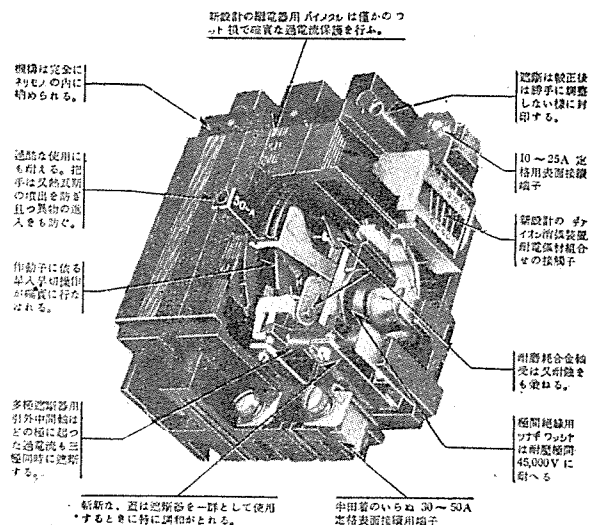


第1圖 NF-50型デアイオン遮断器



第2圖 NF-50型遮断器外形圖

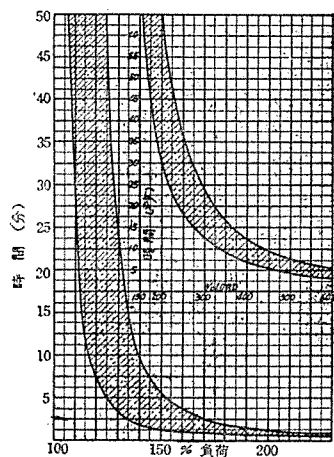
使用して居る。消弧装置は可動接觸子の開閉部に接近して、薄いV字形の切込を持つた鐵板製の消イオン板をファイバーの絶緣板で狭い隙を置いて積重ね、電弧を完全に包圍する様にしたデアイオン消弧装置である。このデアイオン消弧装置は回路遮断時の電弧に沿ふて置かれ、可動接觸子の先端はV字形切込の間を移動する様に配置せられるので、遮断時に生ずる電弧は電弧電流に依る磁束のため、消イオン板の方向に電磁力を受け消イオン板中に吸引せられる。電流零になつて電弧勢力が止んだ直後、消イオン板の陰極に接した極めて薄い空間の絶緣耐力が急激



第3圖 NF-50型デアイオン遮断器

に回復し、従つて各消イオン板間の空氣の絶縁耐力は急速に大となり、接觸子の早切動作と相俟て完全に電弧の遮断が行はれる。

この開閉機構と組合せられる熱動機電器は、開閉機構と係合する部分を持つた短冊型のパイメタルで、回路に直列に入れられ、パイメタルに直接負荷電流が通り、自身の抵抗に依るワット損失によつて加熱せられる。その加熱に依る彎曲が豫定値に達すると係合を引外して機構部分の接觸子を開く。單極遮断器では直接パイメタルの上部が開閉機構の引外腕と係合し、2極及び3極遮断器では中間に引外軸を設け、引外腕はこの中間軸と係合しパイメタルの彎曲が中間軸を廻轉する事に依つて動作する構造である。第4圖はこの遮断器の電流時間特性を示す曲線である。第1圖及び第2圖に依つて判る如く外形は單極遮断器の幅を單位として、2極はその2倍、3極はその3倍であるから分電盤の分岐回路用遮断器として使用する場合には標準寸法の函を使用して極数の違ふ遮断器を納める事が出来、設計並に保修上甚だ便利である。



第4圖 作動特性曲線

Ⅲ NF-50型ダイオン遮断器の改良部分

この遮断器の改良點は下記の3點である。

(1) 消イオン室の構造

舊型の遮断器では消イオン板を耐熱成型品に直接取付た爲、長い間には成型品の壁が電弧に曝されて炭化する懸念があり、成型品の耐熱度を喧しく言つておつたが、新型遮断器では前記の様にV字型の切込を持つ鉄板製の消イオン板をファイバー板で狭い隙を持たせて積重ね完全に包圍してしまつた爲に成型品の耐熱度が左程問題でなくなつた。

(2) 操作ハンドルの構造

電燈用、工業用其他の配電路を制御する半密閉型回路遮断器は屢々高誘導性回路を開放するを要し、過負荷時又は短絡故障時に開放する場合には相當大きな電弧を發生し、之に起因する高壓の熱瓦斯又は焰が外函の操作ハンドル貫通口の隙間から外函に噴出して人又は物品に危害を加へることがあるので、この危険を適切なる方法に依り防止する必要がある。この防止方法として遮断器の

蓋の中央部内面に、ハンドルの操作方向に沿ふて弧狀の座を設け、操作ハンドルの弧狀の閉鎖部分とが共動する様にしてある。蓋の弧狀座にはハンドルの運行方向に沿つて1對の長手の溝を設け、中央の幅廣き溝にはこの溝に平行してハンドルの貫通の爲開口部を設けた。一方操作ハンドルは弧狀のものでその中央上部に操作握みの突起を設け、下部の弧狀閉鎖部分の上面には1對の突堤を作り、その突堤部が蓋の長手溝と係合する様にした。その間に僅かの間隙を設けて幅方向には幾分可動とし、操作ハンドルの下から押せば緊密に係合する所謂弁体として作用するものとした。尚作動子と操作ハンドルとの係合は作動子に突片を設け、ハンドル下部の穴に緩かに嵌込む構造とした。可動接觸子が開いた場合接觸子間に生ずる電弧に依て函内に發生する熱瓦斯又は焰は相當高壓を以て操作ハンドルを下より加壓する。このとき蓋の溝部分は突堤部と緊密に接觸して熱瓦斯の噴出を阻止することが出来る。

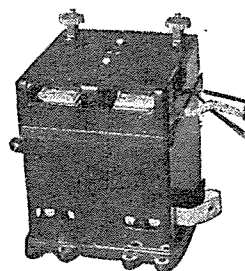
又從來の分岐回路遮断器では、作動子を成型品製の操作ハンドルを埋込んだ金具にカシメ止したため、取扱の亂暴な場合には握みの首部分から折損し、甚しい場合には作動子の一部が露出して高壓の金屬部分が現れ危険であつた。この対策として前記の様に單に突起を穴に緩かに嵌込み蓋との共動に依る構造とし、更にハンドルの恰好を變へくびれ部分を無くし、極めて圓滑なる作動が出来て安全度を増した。

(3) 端子部分の構造

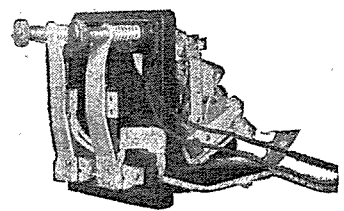
遮断器の端子に接続せられる電線の太さは、遮断器の定格に應じ夫々異り又配線方法に依つても夫々の要求があるので、この遮断器の端子には表面接続用として二通りの配線を考へ、定格電流30A迄には表面の座金は端子を、それ以上の定格には側面の差込式端子を、裏面配線用には分電盤に用ふる場合と、配電盤で端子棒を用ひる場合とに便利な裏面接続部分を設けて、如何なる配線方法も任意に選び得る至極便利な構造とした。

Ⅳ NT型變壓器用遮断器

第5圖及び第6圖は試作したNT型變壓器用遮断器の外観及び内容である。この遮断器はNF型遮断器の應用品で變壓器と共に油中に納めて用ひられる。變壓器の溫度時間特性と遮断器に設けた機電器のパイメタルの動作特性とを合せて、變壓器の短時間容量を増すと共に、短絡等に依つて起る焼損から變壓器を守る目的で作つたものである。即ち變壓器の焼損に對する溫度時間特性に大体並行してそれよりも早く動作する様に、機電器のパイメ



第5圖 外観 #42965



第6圖 内部 #42966

ルを選定すればよい。

第 1 表

V 熱動過電流継電器のバイメタル

誘導電動機の過電流保護に廣く用ひられる熱動継電器の要素は、一部低温熔融金屬を利用したものもあるが、構造を簡単にする點から大部分の感熱部は、恒温装置に最も普通に用ひるバイメタルを利用して居る。之は膨脹係数の異なる 2 枚の金屬板を熔着若しくは鍛着したもので、温度が昇れば片面が他の面よりも餘計伸びて彎曲する。このバイメタルの先端の變位に依つて引外機構を動作させるのである。熱動継電器に用ひるバイメタルは普通一端を固定した短冊形が多く用ひられるから、此形のものに就き他端に生ずる彎曲の式を示すと次の様になる。

$$D = \frac{K_1(T_2 - T_1)l^2}{t} \dots\dots\dots (1)$$

D = バイメタルの彎曲 (mm)

l = 短冊の長さ (mm)

t = バイメタルの厚さ (mm)

K₁ = 彎曲係数

T₂-T₁ = 温度變化 (°C)

この式で K₁ なる彎曲係数は組合せた 2 枚の金屬板の膨脹係数の差に依て定まる係数で、(5.6~13.9)×10⁻⁶ の値をとる。

次に彎曲強さは次式で表はされる。

$$P = \frac{K_2 Db t^3}{l^3} \text{ (kg)} \dots\dots\dots (2)$$

b = 短冊の幅 (mm)

K₂ = トルク係数

其他 (1) 式に同じ

熱動継電器に於けるバイメタルの加熱方法を大別すれば、バイメタルに直接電動機電流を通し、バイメタル自身の抵抗によるワット損失を利用する直熱型と、バイメタルとは別個に電動機電流を通す加熱子を設け傳導又は輻射熱を利用する傍熱型とに分けられる。NF 型遮断器では NF-50 型には前者を NF-225 型には後者を用ひ、NF-100 型では兩者を併用して居る。

之等継電器に使用するバイメタルの温度は定格電流に於て 100°C 前後、動作時に於て最高 150°C に制限して居るが、線路の短絡等により瞬間的に非常に大なる電流が流れると、バイメタルの温度上昇は短時間内の加熱であり全く放熱なきものと考へるのが妥當であるから、優秀な短絡遮断機構を持つたものでも異常の温度上昇を來し、低温用バイメタル即ち眞鍮-アンパーの組合せでは著しく弾性限が低下し、從てバイメタルの内部歪力が之を超え永久變形を起し、温度變位の可逆性を失ふ恐れなしと言へない。この點から本遮断器に使用するバイメタルは眞鍮-アンパー組合せを避け、高温用の合金鋼-アンパー組合せを使用して居る。一方小容量の遮断器は直熱型で、バイメタル自身相當抵抗の高い材料が必要なので高抵抗の合金鋼-アンパー組合せのバイメタルが必要となつて來る。

現在市販のバイメタルは第 1 表の如き成分及び特性を持つてゐる。

成	分	彎曲係数 K ₁	固有抵抗 μΩ-cm	常用動作温度 °C	最高使用温度 °C
3.6% Ni 鋼	6.4 眞鍮	13.9×10 ⁻⁶	—	-50 ~ 150	160
3.6% Ni 鋼	25%Ni, 8.5%Cr 鋼	12.3×10 ⁻⁶	8.5	-50 ~ 250	250
4.2% Ni 鋼	25%Ni, 8.5%Cr 鋼	9.0×10 ⁻⁶	7.0	-50 ~ 350	350

本表に示す彎曲係数は常用動作温度迄の平均値であり、後述する熱処理の方法に依て相當變化する。又材質的には温度と線返し歪で疲れ易い状態に置けば、永久變形を起すから實際使用に當ては荷重の點からも充分考察するを要する。廣い温度範囲に亘り均一な彎曲係数と材質的に疲勞を來さぬバイメタルが要望される。現在 NT 型遮断器には一部市販バイメタルを使つて居るが、大部分は相當量のマンガンを含んだ金屬又はニッケルとマンガンを含んだ金屬、とアンパーとの組合バイメタルを使用して居る。

バイメタルの感度を本質的に向上せしむるには彎曲係数 K₁ を出来るだけ大きくする必要がある。この K₁ を大きくするには、

- (1) 組合せた兩金屬の膨脹係数の差を大きくすること。
- (2) 兩組合金屬のヤング係数の比が 1 に近いこと。
- (3) 兩金屬の厚さの比 h₁/h₂=m を最も有効に選定すること。

第 2 項のヤング係数に就ては低温用バイメタルでは、6~4 眞鍮の 1.54×10⁶ に對しアンパーの 1.89×10⁶ でその比は大約 1.25 に對し、高温用では殆んど 1 に近い。第 1 項の膨脹係数の差の方は眞鍮-アンパーの方が甚だしく大きく、結果に於てはヤング係数の比は膨脹係数の差に對しては殆んど問題にする程の影響を與へない。又兩金屬の厚さの比 h₁/h₂=m は m=2 又は m=1/2 でも感度に於ては大約 85% に低下する位で、實際問題としては m=2 又は m=1/2 となつても餘り問題なく、結局は兩金屬の膨脹係数の差即ち 2 種金屬の選定がバイメタルの彎曲係数に甚だしく影響することになる。マンガ鋼又はニッケル、マンガ鋼を NF 型遮断器のバイメタルの高膨脹係数側の金屬とした理由は實にこの點に存するのである。

純粹な鐵は 910°C に於て A₂ 變態點を通過し、更に之を加熱すると約 1400°C で A₄ 變態點を通過することは周知の事であつて、910°C 以下の鐵は α 鐵と稱せられ、910~1400°C に於ける鐵は γ 鐵又は オーステナイトと言はれる。今鐵を加熱するときは 910°C までは均整に膨脹して 1°C につき 12×10⁻⁶ の膨脹係数を有し、910°C と 1400°C との間即ち A₂ と A₄ 變態點との間では、均整にして遙かに急速に膨脹してその係数は 20×10⁻⁶ であり、更に 1400°C 以上に加熱するときはこれよりも低率の係数となる。比較的純粹な鐵と相當量のマンガンを含む合金は 150~500°C の範囲に亘り オーステナイト組織の鐵と殆んど同一の熱膨脹特性を有し、この温度範囲で可逆なる熱特性を有して居る。又 100~125°C ではニッケル鐵合金と近似の係数を有し、125°C 以上では遙かに大きい係数を有す

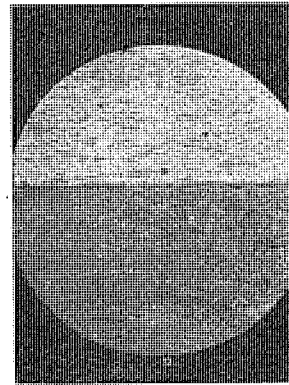
る。この合金を36%ニッケル鋼即ちアンパーの様な比較的低い膨脹係数の金属と組合せてパイメタルを作れば極めて有用なパイメタルが得られる。第1表に示す高温用パイメタルのニッケル-クロム鋼はニッケルの含有量25%前後である。ニッケルは時局下極めて有用なる資材で使用制限令に依り極力ニッケルの使用量を制限すべきで、特性の許す限りニッケルの含有量を少くすべきであり、その點からもマンガンを使用する事が望ましい。尙このマンガ鋼にニッケルを含有せしめて γ 及び δ 鐵の變態點を變へ100~400°Cの溫度範圍に亘りオーステナイト組織の高い熱膨脹係數を得る爲めに約10%のニッケルを加へたものも使用して居る。

現在NF型遮斷器に使用して居る上記マンガ鋼又はマンガ鋼、ニッケルを含む合金よりなるパイメタルを次表に示す。

第2表

高膨脹係數側	低膨脹係數側	彎曲係數	比抵抗 $\mu\Omega\text{-cm}$
10%Ni, 10%Ni鋼	36% Ni 鋼	14.8×10^{-6}	
25%Ni, 14%Ni鋼	36% Ni 鋼	14×10^{-6}	$80 \pm 3\%$

NF-50型遮斷器の内、定格電流10~20Aのものはパイメタルを通る電流が小さいため、パイメタル自身の發熱を大ならしむるために斷面積を小さくするか、又は特に高抵抗のものが必要である。斷面積は引外機構に要する力を一定とする同一構造のものでは厚さを特に薄くすることは不可能で、結局高抵抗で更に彎曲係數の比較的大きいものが必要となる。又ニッケルの所要量を少しでも少くする爲に、低膨脹係數側にアンパーを使用するは止むを得ぬとしても他の側の材料にニッケル、クロム鋼の代用材を使ふこととし、鐵-クロム-アルミ系合金即ち鐵クロムを使用するものを試作し、その結果は非常に好結果が得られ、定格電流の小さい遮斷器に實用して居る。このパイメタルの特性は彎曲係數 8.1×10^{-6} (0~120°C)、比抵抗 $100\mu\Omega\text{cm}$ (28°C)、最高使用溫度650°C、最高彎曲溫度234°Cで、ニッケル-クロム鋼とアンパーとの組合せのものに比し彎曲係數に於て約70%、比抵抗に於て約120%で、製品に使用して少しも遜色なき結果が得られて居るから、この種パイメタルに於て高温用としてニッケルを節約した唯一のものと言ふことが出来る。遮斷器若しくは起動器に使用する1台分のパイメタルの量は甚だ少量ではあるが、その製作台數は非常に莫大な數字となるから、結局パイメタルの使用量は多量となるのでニッケルの含めぬパイメタルの製作を實現したならば國策順應と言ひ得るし、斯くすることが目下の急務と考へこの方面の試作に盡力



第7圖
パイメタル顯微鏡
寫眞

して居る。

第7圖は鐵-クロム-アルミ系合金と36%ニッケル鋼とを組合せたパイメタルの顯微鏡寫眞である。

總てパイメタルは冷間壓延によつて仕上られるものなるため、壓延作業のときに生ずる歪を有する。この歪はパイメタルの溫度一彎曲の可逆性に大なる障害となるもので必ず製品は壓延後に組合せた材料の種類に依つて夫々適當な溫度で充分熱處理を施す必要がある。又實際に熱動繼電器の一部として拔型加工する場合も矢張加工の際に生ずる内部歪は、之又充分に熱處理して完全に歪を除去しなければならぬ。現在市販のパイメタルには夫々熱處理溫度を指定し回数も數回繰返す事を推奨して居るが、實際問題として相當多量の成型品を一々指定通りの方法で實施する事は手數がかかるので、色々の方法を實施した結果、鹽槽爐を利用して數秒間で完全に歪を除去したものを更に後處理して均一な彎曲特性の得られる方法を採用して居る。

VI 結 言

以上最近開發した小型ダイオン遮斷器、及びNT型變壓器用遮斷器に就き大要を述べた。しかしこの遮斷器に使用したパイメタル型の繼電器はその溫度作動特性が誘導電動機の溫度容量と甚だ近似の特性を有し、起動に於て無駄な遮斷を行ふことなく、過電流から電動機を完全に保護するもので、更に構造上、外觀上の諸條件を完備して居り今後各方面への進出を期待して居る。又大東亞戰下製作者としては重要資材を最有効に利用して最小の資材を以て必要電氣機械を製造しなければならぬが、使用者側に於ても之に協力して既設設備の許容範圍内の過負荷が行なはれる様な氣運にある様であるから、NT型變壓器用遮斷器も今後が相當期待出来るものと言ひ得る。この種遮斷器の生命たる接觸子材の問題、及び熱動繼電器の信頼度の向上には一段の努力を拂ふ積りである。

送油式變壓器用電動油ポンプ

高 桑 常 信

内 容 梗 概

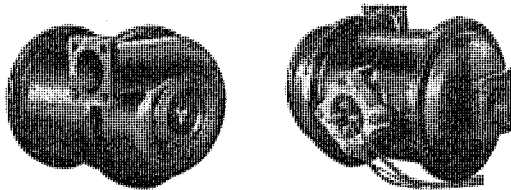
今回大形送油式變壓器を受託製作したので、この變壓器の絶縁油を循環さすべき電動油ポンプに就き、その具備すべき條件、構造、特長、試験結果等の概略を述べたものである。

1. 緒 言

今般當社〇〇製作所にて製作せる、記録的大形送油式變壓器に取付くべき、絶縁油循環用電動油ポンプを當所に於て製作したので、その概要を記し御参考に供する次第である。

變壓器の絶縁油を冷却するのに、熱による對流を利用し、多數の放熱管内を通して冷却する自然循環式や、ポンプに依り油を循環させ、放熱器部分を送風器にて吹き、冷却する強制循環式等がある。前者の自然循環式には、多數の放熱管が必要であり、變壓器容量が大きくなればなる程放熱管に要する資材も益々多くなるが、一方強制循環式では、送風機、電動油ポンプ等が入用とはなるが、放熱部分が非常に小さくてすむから極めて資材節約に適ひ、従つて變壓器全体の形狀も小さくする事が出来るのである。

以下各項に亘り、この絶縁油を循環さすべき電動油ポンプにつき述べる。第1圖及第2圖は本品の外観を示す。



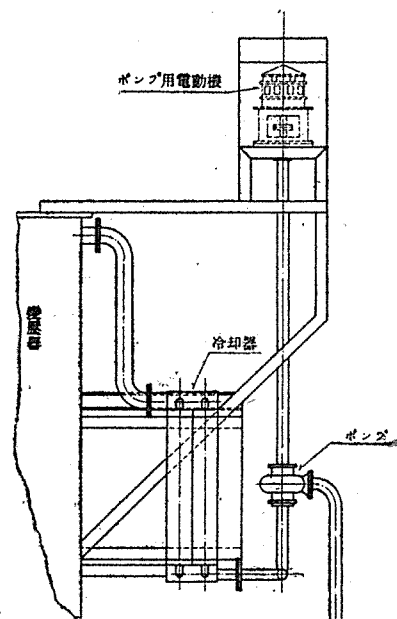
第1圖 外 観 #42965 第2圖 外 観 #42966

2. 構 造

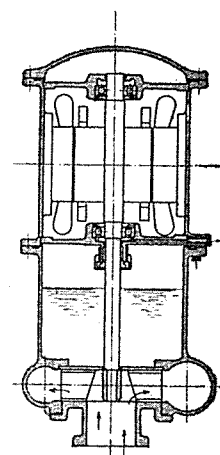
變壓器油を循環させるポンプとして従來は電動機とポンプとが別々になり、兩者を連結する軸が大氣中で回轉する方式のものが用ひられて來たが、この種ポンプの最大の缺點は、變壓器油が軸の貫通部から漏洩する事である。この油洩れを防止せんとして、極めて嚴重なパッキンを施しても、滲透力の強いこの油には効果少なく、長時間使用中には必ず洩れて來るのである。又パッキンを固くすればする程機械的損失も大となり、ポンプ効率の低下を如何ともし難い。これ等の點よりして、第3圖の如くポンプを變壓器内油面以上の高所に置き、油の充滿せる管の中で長軸を回轉し以て油洩れを防止するものもあるが、變壓器が大形になればなる程軸は長くなり種々の機械的制限を受けるのであまり感心しない。

それでは軸の貫通部を無くすれば良い、即ち大氣中に軸を曝さなければ良い。その爲めには第4圖の如き構造のものが考へられる。

これは電動機部分をして空氣室の作用をなさしめ、温



第3圖



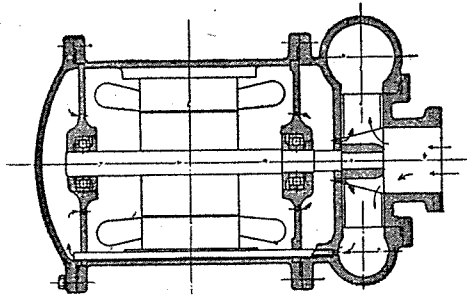
第4圖

度の變化、或は變壓器内の油面の變化等に依る壓力變動があつても、ポンプ内油面をして羽根車部分を露出せしめる事なく、又電動機枠内の固定子巻線を浸す事のない様にしておけば油の漏洩及びその他の障害は完全に防止出来るわけである。

然しながらこの構造のものは、如何にパッキン(回轉部分以外のもの)が完全であつても、長時間使用してゐる

間には自然空気が洩れ、且又壓力ある空気が油面と廣範圍に亘り接觸してゐるため、油中へ空気の溶け込む怖れが多分にあるのである。元來變壓器は真空處理を施してゐる位で、油中に空気が溶け込んでゐたならば、油の絶縁耐力が低下する傾向が著しくなるから、本構造のものもあまり芳しくないと言ふ結論になる。故に油が空気に接觸する部分が全然ない様にしたら良いわけである。この目的に副ふためには第 5 圖の如きものが考へられる。

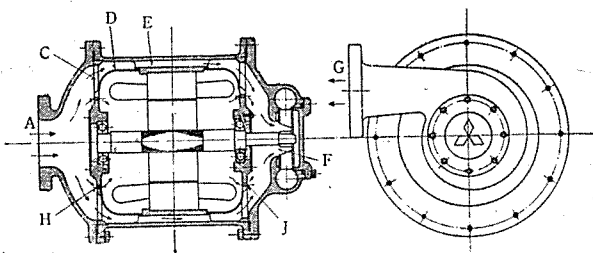
即ち電動機諸共油中に没し、電動機が油中に於て回転する式のものである。この種のもは構造上にはもはや缺點は無くなつたわけである。油洩れもなく又空気も溶け込まない。



第 5 圖

然しながら温度上昇の點より考察する時、變壓器油は運轉中最高約 80°C に上昇するのであるが、かゝる高温の油に浸つたまま運轉を續ける時は忽ち電動機が過熱状態に陥つてしまふのである。故に電動機枠内の油を常に入れ替へて電動機の發熱量を充分に奪ひ去る様にしなければならない。今假りに圖の如き通路を作り、油の一部をして電動機内を通せしむると低揚程のものでは約 10% をこゝで消費しなければならない。揚程が高くなれば、即ち油量の割に所要馬力が増大すれば、この損失の割合も増加するのは當然である。因つてこの方法もあまり良いとは言へないことになる。

今回製作せるものは以上の諸缺點を悉く除去せるものにして、その構造は第 6 圖に示す通りである。次に本ポンプの作用を説明すると、先づ吸込口 A より入つた油は B に於て急に流路形状の變化により低速となり C の口より電動機部分に入り、油案内 D の作用に依り、電動機の外周に設けられたる通路 E を經て反對側出口に至り、次で羽根車の回転により F より吸込まれ、羽根車のエネルギーを吸収した油は G の吐出口より吐き出されて行くのである。又油の一部分はラケットの小孔 H より入り、電動機内部を通り、反對側小孔 J より出で、主流と合するようになつてゐる。斯くの如くする時は、外部を流れる



第 6 圖

主流と、回転子の回転により攪拌されてゐて、抵抗多き内部を流れる支流とは、自己の弾力に依り内外部を完全に絶縁する油案内 D に依りはつきり區分され、大部分は抵抗少なき外部を流れるのである。電動機内に發生した熱は外周を流れる大量の主流及び電動機内を流れる支流とにより充分に奪ひ去られる。以上の如くして本電動油ポンプは、油の漏洩も、空気の溶け込みも、又電動機の過熱も完全に防止し得るものである。

3. 羽根車の設計

渦巻ポンプの主要部分たる羽根車の設計は最も肝要な事項の一つである。本電動油ポンプに要求された仕様は

油 量	1000 立毎分	電源 220 ボルト
揚 程	2 米	60 サイクルの場合
使用油	TES 第 93 號第 1 種變壓器油	
油 温	80°C	

であり、揚程は單に變壓器内の油を循環さすに必要な程度なる故非常に低く、僅か 2 米にして、一方油量は冷却を大ならしむるため 1000 立毎分と言ふ、揚程に比し相當に大量であり、構造上兩側吸込にも出来ないので幾分特殊なポンプである。先づこのポンプを回転さすべき電動機の極数を決定する必要がある。概して渦巻ポンプは低速のものより高速のものの方が高能率であるが、これは羽根車の形状により左右されるもので、比較回転度を参考とし、最も高性能の比較回転度になる回転数を求めその回転数に最も近い極数の電動機を選定する方が良い。渦巻ポンプの効率と比較回転度 n_s との関係は第 7 圖に示す如くであり、 $n_s = 70$ の邊りが最も効率の良い處である。

今 4 極 60 サイクルの時の回転数を約 1750 回転毎分、6 極、60 サイクルの時は約 1100 回転毎分とすれば、

$$N_s = N \frac{Q^{1/2}}{H^{3/4}} \quad \text{但し } \begin{array}{l} Q = \text{油量 m}^3/\text{sec} \\ H = \text{揚程 m} \\ N = \text{毎分回転数} \end{array} \quad \text{より}$$

4 極の場合

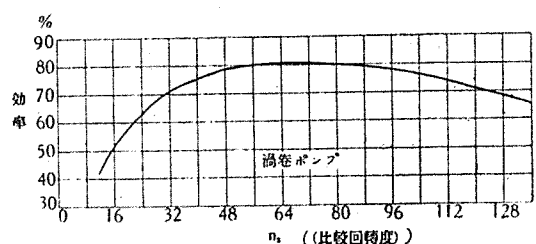
$$N_s = 1750 \times \frac{0.0167^{1/2}}{2^{3/4}} = 134.5$$

6 極の場合

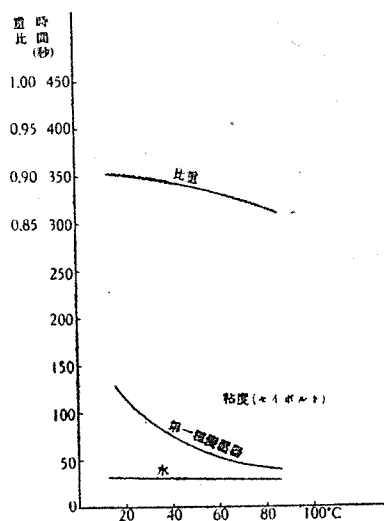
$$N_s = 1100 \times \frac{0.0167^{1/2}}{2^{3/4}} = 84.5$$

以上の結果よりして 6 極の電動機を直結して運轉した方が、4 極の電動機を用いた時より能率的である事がわかる。

羽根車部分の流入口に至るまでに、ポンプ吸込口より入つた油は、方向變換や、流路形状變化等の作用により



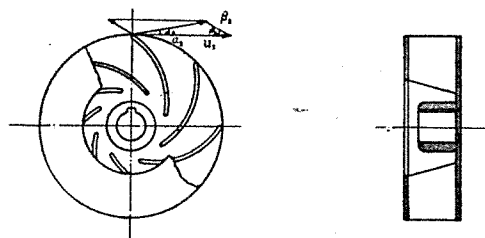
第 7 圖



第 8 圖

勘からず抵抗を受ける。然してこの抵抗は粘度により大いにその値を異にするので、各温度に於ける使用油即ち第一種變壓器油の粘度及比重を測定した結果は第 8 圖の如くである。この圖により判る如く、第一種變壓器油の 80°C に於ける粘度は、常温に於ける水の粘度より多少高い程度である。

以上の結果より吸込側の抵抗、及びポンプ内の抵抗を判定し、全効率を 50% に採つた。



第 9 圖

又羽根の傾斜角 β_2 、吐出角 α_2 を各々 30° 及び 10° として（第 9 圖参照）周速を求むれば、必要なる周速 $u_2 = 8\text{m/sec}$ となり、これより羽根車の外径 D_2 を計算する時は、流速を 3m/sec に制限して求めたる流入口径 D_1 との比は約 1.4 となる。この羽根車は全体の形の割にボスが大きいため、羽根の形状にも制限を受け、因つて $\frac{D_2}{D_1}$ の値をあまり小さく出来ない。大体 1.4 程度だつたなら羽根車によるエネルギーも比較的充分に油に與へ得ると思ふ。一方羽根の枚数を多くして流線の安定性を良好にせんがため、且つ低壓、低速回転なる故空洞現象の懸念も少ないと思はれたので鋼板熔接の羽根車とした。

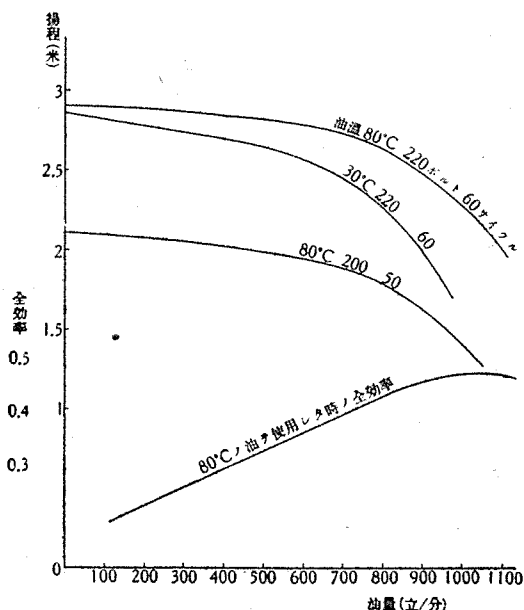
4. ポンプ用電動機

このポンプに使用する電動機は、MK 籠型誘導電動機にして、油中に浸して運轉するものなる故、構造も普通電動機と多少その趣を異にしてゐる個所がある。固定子線輪は耐油性、耐熱性の大きなワニスで処理しておかねばならない。又回転子は流体摩擦抵抗を極力減少せしむるため、すべての突起物を除去し、且つ兩端面に鋼板を當て、通氣孔を封じなければならない。スロット絶縁並に楔にも耐油性の大きな材料を使用する必要がある。

5. 試験結果

このポンプは構造上水を使用して試験を施し得ないので、一般ポンプの種々の値と比較對照する事は出来ない。變壓器油を用ひて試験をした結果は第 10 圖の如くである。圖中の油温 80°C、220 ボルト、60 サイクルにて運轉した場合は使用状態と同一條件で試験した結果である。

尚油温 30°C、220 ボルト、60 サイクルの曲線は参考までに併記したもので、第 6 圖の粘度の曲線を参照する時は粘度がポンプの性能に及ぼす影響の一端が窺はれると思ふ。効率は豫期より多少低かつたが、油量、揚程は大体必要な數値を出し得た。尚この効率の値は、一般ポンプのそれと比較對照する事は出来ない。それは本項の初めに記した如くこのポンプは水にて試験する事不可能にして、第 10 圖の効率の値は水より粘度の高い變壓器油を用ひた時のものであるからである。粘度高ければ當然摩擦抵抗は増大する故効率の低下するのは必然である。一方本電動油ポンプは小容量にして然も第 2 項に於て述べた如き種々の理由に依り吸込側に勘からず抵抗を伴ふので、これも効率低下の一因をなしてゐる。然し乍ら種々なる故障や弊害を完全に除去し得る事を想へば、多少の効率低下位は償つて充分餘りがあると思ふ。



第 10 圖

6. 結 言

以上で大約送油式變壓器用電動油ポンプに関する極めて簡單なる報告を終る次第であるが、何等かの御参考になり得れば甚だ幸ひに思ふ次第である。今後益々熾烈化すると豫想される戦局を切り開くものは、世界に比類なき鞏固なる精神力に加ふるに、分秒を争ふ急激なる生産擴充である事は何人たりとも疑ふ餘地がない。従て大電力輸送も喫緊の要事となり、變壓器も益大形化する時この種ポンプの必要も愈々増大すると思はれる。筆者も本ポンプの性能向上に一層の努力を致す覚悟である。

最後に讀者諸彦の隔意なき御叱正を希て熄まない。

Heaviside 演算子法に對する新しい考察と その電気回路解析に於ける應用 (IX)

研 究 部 菅 野 正 雄

第 IV 章

漸近展開の演算子法的取扱ひ

§ IV. 1. 緒 言

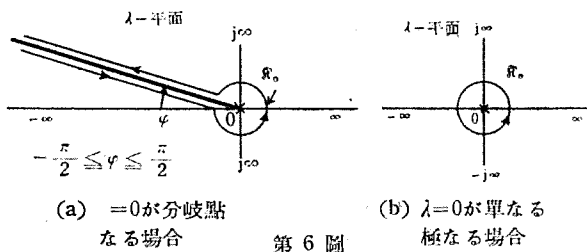
すでに第 I 篇の冒頭に於て、從來の Heaviside 法による漸近展開の取扱ひ方に不備のあることを述べ、更に此の不備の因つて来る所は全く $p^{-1} \cdot \equiv \int_0^t \cdot dt$ の逆演算子としての p を d/dt と考へてゐる點にあることを明かにしたのであつたが、(I, § IV. 7)、本章に於てはその不備を補ふ一手段として、擴張された演算子算法による漸近展開の取扱ひ方に就て述べる。

§ IV. 2. 變換子 $\mathfrak{N}_0(t, \lambda)$

變換子 $\mathfrak{N}_0(t, \lambda)$ を

$$\mathfrak{N}_0(t, \lambda) \cdot \equiv \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathfrak{N}_0} \frac{e^{(t-a)\lambda}}{\lambda} \cdot d\lambda, \quad (-\infty < t < \infty) \cdots (IV. 1)$$

によつて定義する。但し積分路 \mathfrak{N}_0 は第 6 圖に示す如くその左側には $\lambda=0$ 以外の異常點を含まず、且、被積分函数は積分路上に於て一價正則となつてゐるものとする。



然らば容易に次の關係が得られる。

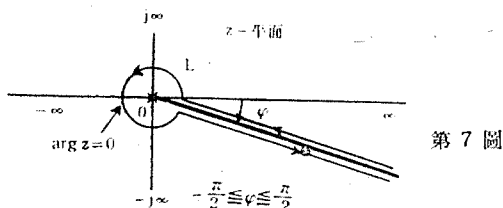
$$\mathfrak{N}_0(t, \lambda) \lambda^s \equiv \begin{cases} \frac{\sin s\pi}{\pi} \Gamma(s) (t-a)^{-s}, & (s > 0), \\ \frac{1}{\Gamma(1-s)} (t-a)^{-s}, & (s < 1). \end{cases} \cdots (IV. 2)$$

證明:

Γ -函数に對する Hankel の表示⁽¹⁴⁾に従へば

$$\oint_L (-z)^{s-1} e^{-z} dz \equiv -2j \sin s\pi \Gamma(s), \quad (s > 0)$$

なる關係が得られる。こゝに積分路 L は第 7 圖に示す如くである。上式に於て $z = -\lambda(t-a)$



なる置換をなせば、

$$\begin{aligned} \text{左邊} &\equiv 2\pi j \oint_{\mathfrak{N}_0} \frac{e^{(t-a)\lambda}}{\lambda} \left[\lambda(t-a) \right]^s d\lambda \\ &\equiv -2\pi j (t-a)^s \mathfrak{N}_0(t, \lambda) \lambda^s \end{aligned}$$

となる。従つて

$$\mathfrak{N}_0(t, \lambda) \lambda^s \equiv \frac{\sin s\pi}{\pi} \Gamma(s) (t-a)^{-s}, \quad (s > 0)$$

が得られる。

又、 $s < 1$ なる時は (III. 17) 式により

$$\mathfrak{N}_0(t, \lambda) \lambda^s \equiv p^s \cdot 1 \equiv \frac{1}{\Gamma(1-s)} (t-a)^{-s}, \quad (s < 1)$$

である。明かに $0 < s < 1$ なる場合は

$$\Gamma(s) \Gamma(1-s) \equiv \frac{\pi}{\sin s\pi}$$

なる關係あるにより、 $0 < s < 1$ に於ては (IV. 2) 式と (IV. 3) 式の右邊同志は全く相等しい。

§ IV. 3.

$$D^n \mathfrak{N}_0(t, \lambda) \lambda^s \equiv \mathfrak{N}_0(t, \lambda) \lambda^{n+s},$$

$$\left(\begin{matrix} n=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ s \text{ は實數} \end{matrix} \right). \cdots (IV. 4)$$

證明:

$s > 0, n=0, 1, 2, \dots$ ならば、

$$\begin{aligned} D^n \mathfrak{N}_0(t, \lambda) \lambda^s &\equiv \frac{\sin s\pi}{\pi} \Gamma(s) (-s)(-s-1) \cdots \\ &\quad \cdots (-s-n+1) (t-a)^{-s-n} \\ &\equiv \frac{\sin(n+s)\pi}{\pi} \Gamma(n+s) (t-a)^{-n-s} \\ &\equiv \mathfrak{N}_0(t, \lambda) \lambda^{n+s}. \end{aligned}$$

又、 $s > 0, n=-1, -2, -3, \dots$ ならば $n=-m$ とおいて

$$\begin{aligned} D^{-m} \mathfrak{N}_0(t, \lambda) \lambda^s &\equiv \frac{\sin s\pi}{\pi} \Gamma(s) \frac{1}{(-s+1)} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{1}{(-s+2)} \cdots \frac{1}{(-s+m)} (t-a)^{-s+m} \\ &\equiv \frac{\sin(n+s)\pi}{\pi} \Gamma(n+s) (t-a)^{-n-s} \\ &\equiv \mathfrak{N}_0(t, \lambda) \lambda^{n+s}. \end{aligned}$$

次に、 $s < 1, n=0, 1, 2, \dots$ ならば

$$\begin{aligned} D^n \mathfrak{N}_0(t, \lambda) \lambda^s &\equiv \frac{1}{\Gamma(1-s)} (-s)(-s-1) \cdots \\ &\quad \cdots (-s-n+1) (t-a)^{-s-n} \\ &\equiv \frac{1}{\Gamma(1-n-s)} (t-a)^{-n-s} \\ &\equiv \mathfrak{N}_0(t, \lambda) \lambda^{n+s}. \end{aligned}$$

又、 $s < 1, n=-1, -2, -3, \dots$ ならば $n=-m$ とおいて

$$D^{-m} \mathfrak{W}_0(t, \lambda) \lambda^s \equiv \frac{1}{\Gamma(1-s)} \cdot \frac{1}{(-s+1)(-s+2)\cdots(-s+m)} (t-a)^{-s+m} \\ \equiv \frac{1}{\Gamma(1-n-s)} (t-a)^{-n-s} \\ \equiv \mathfrak{W}_0(t, \lambda) \lambda^{n+s}.$$

よつて (IV.4) 式が得られる。

§ IV. 4. $f(\lambda)$ が $\lambda=0$ のみに異常點を持ち、
且、 $\lambda=0$ を中心として

$$f(\lambda) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$$

の如く冪級数展開が可能なる時は、

$$f(D) \cdot \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n D^n.$$

と書くことゝすれば、前節に於て述べたる所により

$$\mathfrak{W}_0(t, \lambda) f(\lambda) \cdot \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{W}_0(t, \lambda) a_n \lambda^n \cdot \\ \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n D^n \mathfrak{W}_0(t, \lambda) \cdot \\ \approx f(D) \mathfrak{W}_0(t, \lambda) \cdot \cdots \cdots (IV.5)$$

なる關係が得られる。但し、(\approx) なる記號は、級数

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n D^n \mathfrak{W}_0(t, \lambda) \cdot$ が收斂級数なる時は全等號 (\equiv) を、

漸近級数なる時は漸近記號 (\sim) を表はすものとする。

§ IV. 5. $f(\lambda)$ が $\lambda=0$ のみに異常點を持ち、
且、 $\lambda=0$ を中心として

$$f(\lambda) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{\frac{k}{m}}, \quad (m=1, 2, 3, \cdots)$$

の如く Puiseux の級数⁽¹⁵⁾に展開出来る時は、

$$\mathfrak{W}_0(t, \lambda) f(\lambda) \\ \approx \sum_{n=0}^{\infty} (t-a)^{-n} \sum_{k=0}^{m-1} a_{k+nm} \frac{(t-a)^{-\frac{k}{m}}}{\Gamma(1-\frac{k}{m}-n)} \\ \cdots \cdots (IV.6)$$

なる關係がある。

證明:

$$f(\lambda) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{\frac{k}{m}} \\ = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \lambda^{\frac{k}{m}} + \sum_{k=m}^{2m-1} a_k \lambda^{\frac{k}{m}} + \cdots \\ \cdots + \sum_{k=(n+1)m}^{(n+1)m-1} a_k \lambda^{\frac{k}{m}} + \cdots \\ \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \sum_{k=0}^{m-1} a_{k+nm} \lambda^{\frac{k}{m}}$$

と書ける故、(IV.4) 式を参照すれば

$$\mathfrak{W}_0(t, \lambda) f(\lambda) \\ \approx \sum_{n=0}^{\infty} D^n \sum_{k=0}^{m-1} a_{k+nm} \mathfrak{W}_0(t, \lambda) \lambda^{\frac{k}{m}} \\ \approx \sum_{n=0}^{\infty} D^n \sum_{k=0}^{m-1} a_{k+nm} \frac{(t-a)^{-\frac{k}{m}}}{\Gamma(1-\frac{k}{m}-n)} \\ \approx \sum_{n=0}^{\infty} (t-a)^{-n} \sum_{k=0}^{m-1} a_{k+nm} \frac{(t-a)^{-\frac{k}{m}}}{\Gamma(1-\frac{k}{m}-n)}$$

が得られるのである。

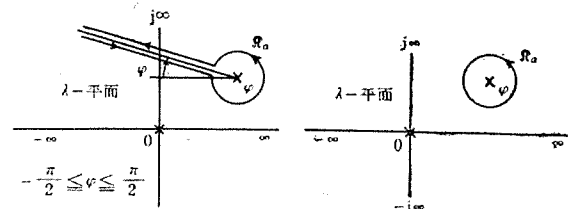
§ IV. 6. 變換子 $\mathfrak{W}_a(t, \lambda)$

變換子 $\mathfrak{W}_a(t, \lambda)$ を

$$\mathfrak{W}_a(t, \lambda) \cdot \equiv \frac{1}{2\pi j} \oint \mathfrak{W}_a \frac{\varepsilon^{(t-a)\lambda}}{\lambda} \cdot d\lambda \cdots (IV.7)$$

によつて定義する。但し、積分路は第 8 圖に示す如くであつて、種々の條件は第 6 圖の場合と同様である。然らば次の關係が得られる。

$$\mathfrak{W}_a(t, \lambda) \cdot \equiv \varepsilon^{a(t-a)} D(D+\alpha)^{-1} \cdot \mathfrak{W}_0(t, \lambda) C\left(\frac{\lambda+\alpha}{\lambda}\right) \cdots \cdots (IV.8)$$



(a) $\lambda=\alpha$ が分岐點
なる場合

(b) $\lambda=\alpha$ が單なる
極なる場合

第 8 圖

證明:

定義により

$$\mathfrak{W}_a(t, \lambda) f(\lambda) \equiv \frac{1}{2\pi j} \oint \mathfrak{W}_a \frac{\varepsilon^{(t-a)\lambda}}{\lambda} f(\lambda) d\lambda$$

であるが、こゝで

$$\lambda - \alpha = \mu$$

とおけば

$$\mathfrak{W}_a(t, \lambda) f(\lambda) \\ \equiv \frac{\varepsilon^{a(t-a)}}{2\pi j} \oint \mathfrak{W}_0 \frac{\varepsilon^{(t-a)\mu}}{\mu} \frac{\mu}{\mu+\alpha} f(\mu+\alpha) d\mu$$

となるが、 μ を單に λ に書き換へ、(IV.4) 式を参照すれば

$$\mathfrak{W}_a(t, \lambda) f(\lambda) \\ \equiv \varepsilon^{a(t-a)} \mathfrak{W}_0(t, \lambda) \frac{\lambda}{\lambda+\alpha} f(\lambda+\alpha) \\ \equiv \varepsilon^{a(t-a)} D(D+\alpha)^{-1} \mathfrak{W}_0(t, \lambda) C\left(\frac{\lambda+\alpha}{\lambda}\right) f(\lambda)$$

となるから、これより直ちに (IV.8) 式が導かれる。

次節以下に見る如く、此の變換子 $\mathfrak{W}_a(t, \lambda)$ は漸近展開の演算子法的取扱ひに有用のものである。

§ IV. 7. $f(\lambda)$ が L-M 条件を満足し、且、

$$L_c(t, \lambda) \cdot f(\lambda) \equiv I\left(\frac{t}{a}\right) F(t)$$

と書かれ、更に $f(\lambda)/\lambda$ の異常点を $0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ とすれば、 $L_c(t, \lambda)$ の積分路を是等の異常点を取囲む積分路に変形し、(IV. 8) 式の関係を用ふることにより容易に

$$\begin{aligned} f(p) \cdot 1 &\equiv \sum_{t=0}^n \mathfrak{M}_t(t, \lambda) f(\lambda) \\ &\equiv \sum_{t=0}^n \varepsilon^{\alpha_t(t-a)} D(D+\alpha_t)^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot \mathfrak{M}_0(t, \lambda) f(\lambda + \alpha_t) \dots \dots \dots (IV. 9) \end{aligned}$$

なる関係が得られる。但し、

$$\begin{aligned} \alpha_k &\equiv 0, \quad \alpha_k \neq 0, \\ \alpha_k &\neq \alpha_h, \quad \left(\begin{matrix} k, h=1, 2, \dots, n, \\ h \neq k \end{matrix} \right) \end{aligned}$$

とする。而して若し函数 $F(t)$ が収斂級数又は漸近級数に展開可能なるものとすれば、それは次の諸例に示す如く上記の (IV. 9) 式の利用することにより、演算子法的に求められるのである。

例 1.

$$\begin{aligned} (\sqrt{p} \varepsilon^{-a\sqrt{p}}) \cdot 1 &\simeq \mathfrak{M}_0(t, \lambda) \cdot \\ &\quad \cdot \left(1 - \alpha\sqrt{\lambda} + \frac{\alpha^2}{2!} \lambda - + \dots \right) \sqrt{\lambda} \\ &\simeq \left(1 + \frac{\alpha^2}{2!} D + \frac{\alpha^4}{4!} D^2 + \dots \right) \frac{1}{\sqrt{\pi(t-a)}} \\ &\simeq \left(1 - \frac{\alpha^2}{2!} \frac{1}{2(t-a)} + \frac{\alpha^4}{4!} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \cdot \right. \\ &\quad \cdot \left. \frac{1}{(t-a)^2} - + \dots \right) \frac{1}{\sqrt{\pi(t-a)}} \\ &\equiv \frac{1}{\sqrt{\pi(t-a)}} \varepsilon^{-\frac{a^2}{4(t-a)}}. \end{aligned}$$

例 2.

$$\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p}+1} \cdot 1 \equiv \varepsilon^{(t-a)} \left(1 - \int_a^t \frac{\varepsilon^{-(t-a)}}{\sqrt{\pi(t-a)}} dt \right)$$

の漸近展開:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p}+1} \cdot 1 &\equiv \mathfrak{M}_0(t, \lambda) \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}+1} \\ &\simeq \mathfrak{M}_0(t, \lambda) \sqrt{\lambda} (1 - 1/\sqrt{\lambda} + \lambda - 1/\sqrt{\lambda^3} + \dots) \\ &\simeq \mathfrak{M}_0(t, \lambda) (1 + \lambda + \lambda^2 + \dots) \sqrt{\lambda} \\ &\quad - \mathfrak{M}_0(t, \lambda) \lambda (1 + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots) \\ &\simeq \sum_{n=0}^{\infty} D^n \frac{1}{\sqrt{\pi(t-a)}} - \sum_{n=1}^{\infty} D^n \cdot 1 \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi(t-a)}} \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{(2n)!}{n! [4(t-a)]^n}. \end{aligned}$$

この結果は即ち第 I 篇の (I. 17) 式に他ならない。

例 3.

$$\frac{\sqrt{p}}{p-1} \cdot 1 \equiv \varepsilon^{(t-a)} \int_a^t \frac{\varepsilon^{-(t-a)}}{\sqrt{\pi(t-a)}} dt$$

の漸近展開:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{p}}{p-1} \cdot 1 &\equiv \mathfrak{M}_0(t, \lambda) \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda-1} + \mathfrak{M}_1(t, \lambda) \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda-1} \\ &\sim - \sum_{n=0}^{\infty} D^n \frac{1}{\sqrt{\pi(t-a)}} + \varepsilon^{(t-a)} D(D+1)^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot \mathfrak{M}_0(t, \lambda) \frac{1/\sqrt{\lambda+1}}{\lambda} \end{aligned}$$

であるが、

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} D^n \frac{1}{\sqrt{\pi(t-a)}} &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi(t-a)}} \cdot \\ &\quad \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{(2n)!}{n! [4(t-a)]^n}, \\ \varepsilon^{(t-a)} D(D+1)^{-1} \mathfrak{M}_0(t, \lambda) \frac{1/\sqrt{\lambda+1}}{\lambda} \\ &\equiv \varepsilon^{(t-a)} (1+D)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 \\ &\sim \varepsilon^{(t-a)} \left(1 - \frac{1}{2} D + \frac{3}{4} D^2 - + \dots \right) \cdot 1 \\ &\sim \varepsilon^{(t-a)} \end{aligned}$$

なるにより、

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{p}}{p-1} \cdot 1 &\sim \varepsilon^{(t-a)} - \frac{1}{\sqrt{\pi(t-a)}} \cdot \\ &\quad \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{(2n)!}{n! [4(t-a)]^n} \end{aligned}$$

が得られる。この結果が即ち第 I 篇の (I. 26) 式に他ならない。而して此の例からも、こゝに説明せる漸近展開の演算子法的取扱ひは従来の方法の不備を是正してゐることが判るのである。

§ IV. 8. Wagner 氏の方法との比較

Laplace 変換法を利用しての漸近展開の取扱ひ方に就ては、Wagner 氏著“Operatorenrechnung”中、255頁乃至 283 頁(1940)に相當詳しく論ぜられてあるが、(他の研究者の説明もこれと大同小異である)、その説明は必ずしも充分満足なるものとは言ひ難い。よつてこゝにその大要を概説してその不備なる諸点を明かにし、以て本文に於て説明せる方法と比較して見る。

今、 λ -平面上の複素函数 $f(\lambda)$ が

$$f(\lambda) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^{n+s}, \quad (s < 1)$$

の如く $\lambda=0$ を中心として λ の冪級数に展開出来るものとし、一方、

$$\begin{aligned} F(t) &\equiv L_c(t, \lambda) f(\lambda) \\ &\equiv \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{\varepsilon^{-(t-a)\lambda}}{\lambda} f(\lambda) d\lambda, \quad (c > 0) \end{aligned}$$

の如き関係あるものとする時、従来は

$$F(t) \equiv L_c(t, \lambda) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^{n+s}$$

$$\equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_c(t, \lambda) \lambda^{n+s}$$

であり、而して

$$\begin{aligned} L_c(t, \lambda) \lambda^{n+s} &\equiv \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{\varepsilon^{(t-a)\lambda}}{\lambda} \lambda^{n+s} d\lambda \\ &\equiv \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left(\frac{\varepsilon^{(t-a)\lambda}}{\lambda}\right) \lambda^s d\lambda \\ &\equiv D^n L_c(t, \lambda) \lambda^s \\ &\equiv D^n \frac{1}{\Gamma(1-s)} (t-a)^{-s} \end{aligned}$$

なる故、 $F(t)$ の漸近展開は多くの場合、

$$\begin{aligned} F(t) &\sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n D^n \frac{1}{\Gamma(1-s)} (t-a)^{-s} \\ &\sim (t-a)^{-s} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(t-a)^{-n}}{\Gamma(1-s-n)} \end{aligned}$$

とすることにより求め得られる。併し又、此の求め方によつて正しい漸近級数の得られぬ場合もあるが、その時は適宜の工夫を施してそれを求めなければならないと云ふ説明がなされて來たのであるが、此の説明は次に述べる如く妥當なるものではない。

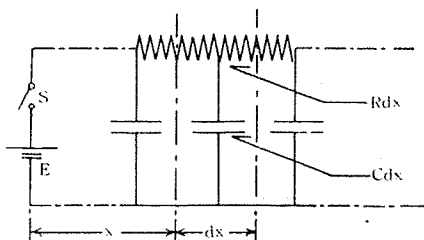
先づ、

$$\begin{aligned} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{\varepsilon^{(t-a)\lambda}}{\lambda} f(\lambda) d\lambda \\ \equiv \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{\varepsilon^{(t-a)\lambda}}{\lambda} \lambda^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n d\lambda, \quad (c>0) \end{aligned}$$

の如く、積分路を $(c-j\infty) \rightarrow (c+j\infty)$ なる直線としたまゝ左邊より右邊の如き展開をなすことは、明かに數學的に不都合であり、次にかくして得られた右邊に於て $L_c(t, \lambda)$ の被演算函数が L-M 條件を満足してゐないにも拘はらず、

$$L_c(t, \lambda) \lambda^n \equiv D^n L_c(t, \lambda).$$

としてこゝに再び誤を重ねて、しかも結果は幸にして他の方法で求められたものと一致することが多々あるとしてゐたわけである。而してこの第二の誤謬を回避する爲に、たとへば $L_c(t, \lambda) \lambda^n$, ($n=1, 2, 3, \dots$) は、漸近展開を取扱ふ際出現したる時は零、然らざる時は n 次の衝撃函數を表はすと云ふ説明がなされてゐるが、これは依然として正しくない⁽¹⁶⁾。又、緒言に於ても述べたる如く、櫻井氏⁽³⁾は發散積分を考慮して上述の困難を救済すべく試みたのであるが、函數の解析接続を發散領域に迄行はふとする考へには考慮の餘地があるものと思はれるのである。



第 9 圖

此の間の事情を具体的にする爲に、Wagner 氏の著書中の 271 頁の例を引用して見る。即ち第 9 圖に示す如き、無誘導の半無限長線路を $t=a$ なる瞬間、 S に於て閉ちてより充分なる時間を経たる後の $x=0$ に於ける充電電流 $i(0, t)$ を、所謂電信方程式の演算子解

$$i(0, t) = L_c(t, \lambda) E \sqrt{\frac{C}{R}} \sqrt{\lambda + \eta} \dots\dots\dots (IV. 10)$$

$$= E \sqrt{\frac{C}{R}} \sqrt{D + \eta} I\left(\frac{t}{a}\right), \left(\eta = \frac{G}{C}\right) \dots\dots\dots (IV. 11)$$

によつて算出するのに、Wagner 氏は次の如くしてゐる。

先づ (IV. 10) 式の右邊の $\sqrt{\lambda + \eta}$ を λ の冪級數に展開して

$$\begin{aligned} i(0, t) &= L_c(t, \lambda) E \sqrt{\frac{C}{R}} \eta \\ &\cdot \left\{ 1 + \frac{\lambda}{2\eta} - \frac{1}{2!} \left(\frac{\lambda}{2\eta}\right)^2 + \frac{1 \cdot 3}{3!} \left(\frac{\lambda}{2\eta}\right)^3 - \dots \right\} \end{aligned}$$

と書き、他の例の場合と同様に

$$L_c(t, \lambda) \lambda^n = 0, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \dots\dots\dots (IV. 12)$$

を代入すると、

$$i(0, t) = E \sqrt{\frac{G}{R}}$$

となるが、これは他の方法によつて得られる結果と一致しない。併し $\sqrt{\lambda + \eta}$ を λ の冪級數ではなく、 $\sqrt{\lambda}$ の冪級數に展開すれば次の様に正しい結果が得られる。即ち $\sqrt{\lambda + \eta}$ を

$$\sqrt{\lambda + \eta} \equiv \sqrt{\lambda} + (\sqrt{\lambda + \eta} - \sqrt{\lambda})$$

の如く少しく變形し、然る後右邊第二項を

$$\sqrt{\lambda + \eta} - \sqrt{\lambda} \equiv \frac{\eta}{\sqrt{\lambda + \eta} + \sqrt{\lambda}} \equiv \frac{\eta}{\lambda + \eta} f(\lambda + \eta)$$

の如く書き換へる。こゝに

$$f(\lambda) \equiv \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda} + \sqrt{\eta}} \equiv \frac{1}{\sqrt{\eta}} \frac{\lambda}{1 + \sqrt{\frac{\lambda}{\eta}}}$$

であるが、

$$L_c(t, \lambda) f(\lambda) \equiv F(t-a)$$

とすると

$$\frac{\lambda}{\lambda + \eta} f(\lambda + \eta) \equiv \varepsilon^{-\eta(t-a)} F(t-a) \dots\dots\dots (IV. 13)$$

なる關係あるにより、

$$L_c(t, \lambda) (\sqrt{\lambda + \eta} - \sqrt{\lambda}) \equiv \varepsilon^{-\eta(t-a)} F(t-a)$$

となる。然るに

$$f(\lambda) = \frac{\lambda}{\sqrt{\eta}} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{\lambda}{\eta}} + \frac{\lambda}{\eta} - \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^3} + \dots \right\} \dots\dots\dots (IV. 14)$$

なる故、(IV. 12) 式の關係及び

$$\begin{aligned} L_c(t, \lambda) \lambda^n \sqrt{\lambda} &\sim \frac{(-)^n}{\sqrt{\pi(t-a)}} \frac{(2n)!}{n! [4(t-a)]^n}, \\ &\quad (n=1, 2, 3, \dots) \dots\dots\dots (IV. 15) \end{aligned}$$

を考慮すれば

$$i(0, t) \sim E \sqrt{\frac{G}{R}}$$

$$+ E \sqrt{\frac{C}{R}} \sqrt{\frac{1}{\pi(t-a)}} e^{-\gamma(t-a)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^{n-1} (2n)!}{n! [4\gamma(t-a)]^n} \dots (IV. 16)$$

となり、他の方法によつて得られる結果と一致する。

併し、上述の Wagner 氏の説明中には次の難点がある。

- (1) $\sqrt{\lambda+\eta}$ を λ の冪級数に展開する時は何故正しい結果が得られないか、又特別の工夫を施して $\sqrt{\lambda}$ の冪級数に展開する時は何故に正しい結果が得られるか、その理由を少しも吟味してゐない。
- (2) (IV. 12) 式及び (IV. 15) 式の如き誤れる関係式を用ひてしかも結果のみは正しくなつてゐることに気が附いてゐない。
- (3) 漸近展開の演算子法的取扱ひの結果を、他の方法による結果と比較してはじめてその正しいか否かを判定してゐるが、これは恰も従來の Heaviside 法に於て採られたと全く同一の行き方であつて、同展開の演算子法的取扱ひの意義を失はしむるものとも云へるのである。
- (4) 假に上述の場合の如く、工夫によつて $\sqrt{\lambda}$ の冪級数に展開出来る例に對しては、一應それに於て計算の方法が與へ得られたとしても、たとへば

$$\begin{aligned} (\cot^{-1} p) \cdot 1 &\equiv \int_a^t \frac{\sin(t-a)}{t-a} dt \\ &\equiv \text{Si}(t-a) \\ &\sim \frac{\pi}{2} - \frac{\cos(t-a)}{t-a} P - \frac{\sin(t-a)}{t-a} Q, \\ &\left(\begin{aligned} P &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n (2n)! \frac{1}{(t-a)^{2n}}, \\ Q &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n (2n+1)! \frac{1}{(t-a)^{2n+1}} \end{aligned} \right) \end{aligned} \dots (IV. 17)$$

の如き例に對しては如何であらうか。結局問題の種類により一々特殊の工夫を要すると云ふことにならざるを得なくなるのである。

然るに § IV. 7 に於て説明せる方法によれば、是等の問題は何れも特別の工夫を要せず、一般式を利用して計算を進め得るものである。即ち (IV. 10) 式又は (IV. 11) 式より

$$i(0, t) \equiv I \left(\frac{t}{a} \right) E \sqrt{\frac{C}{R}} \sqrt{\lambda+\eta} \cdot 1$$

であるが、

$$\sqrt{\lambda+\eta} \cdot 1 \equiv \mathfrak{S}_0(t, \lambda) \sqrt{\lambda+\eta} + \varepsilon^{-\gamma(t-a)} \cdot$$

$$\cdot D(D-\eta)^{-1} \mathfrak{S}_0(t, \lambda) \sqrt{\lambda}$$

$$\sim \sqrt{\lambda} - \varepsilon^{-\gamma(t-a)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{D}{\eta} \right)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{\pi(t-a)}}$$

$$\sim \sqrt{\lambda} + \frac{\varepsilon^{-\gamma(t-a)}}{\sqrt{\pi(t-a)}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^{n-1} (2n)!}{n! [4\gamma(t-a)]^n}$$

であるから、

$$i(0, t) \sim E \sqrt{\frac{G}{R}} + E \sqrt{\frac{C}{R}} \frac{\varepsilon^{-\gamma(t-a)}}{\sqrt{\pi(t-a)}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^{n-1} (2n)!}{n! [4\gamma(t-a)]^n}$$

となり、當然正常なる結果が得られる。

又、(IV. 17) 式の結果は次の如くして得られる。

$$\cot^{-1} \lambda \equiv -j \log \sqrt{\frac{\lambda+j}{\lambda-j}}$$

の異常點は $\lambda = \pm j$ であるから、

$$\begin{aligned} &(\cot^{-1} p) \cdot 1 \\ &\equiv \left\{ \mathfrak{S}_0(t, \lambda) + \mathfrak{S}_j(t, \lambda) + \mathfrak{S}_{-j}(t, \lambda) \right\} \cot^{-1} \lambda \\ &\equiv \frac{\pi}{2} \\ &+ 2 R_e \left\{ \varepsilon^{j(t-a)} D(D+j)^{-1} \mathfrak{S}_0(t, \lambda) \cot^{-1}(\lambda+j) \right\} \end{aligned}$$

となるが、

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_0(t, \lambda) \cot^{-1}(\lambda+j) &\equiv -\frac{j}{2} \mathfrak{S}_0(t, \lambda) \log \frac{\lambda+2j}{\lambda} \\ &\equiv -\frac{j}{2} \left[\log 2 + j \frac{\pi}{2} + \left\{ r + \log(t-a) \right\} \right] \end{aligned}$$

なる故、

$$\begin{aligned} &D(D+j)^{-1} \mathfrak{S}_0(t, \lambda) \cot^{-1}(\lambda+j) \\ &\sim -\frac{j}{2} \frac{D}{D+j} \log(t-a) \\ &\sim -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-j)^n n!}{(t-a)^{n+1}} \end{aligned}$$

となることを考慮すれば、

$$\begin{aligned} &(\cot^{-1} p) \cdot 1 \sim \frac{\pi}{2} \\ &- R_e \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n n!}{(t-a)^{n+1}} \varepsilon^{j(t-a+\frac{n\pi}{2})} \right\} \\ &\sim \frac{\pi}{2} - \frac{\cos(t-a)}{t-a} P - \frac{\sin(t-a)}{(t-a)} Q \end{aligned}$$

が得られるのである。

以上に見る如く、漸近展開の演算子法的取扱ひに關しては、本文に於て説明せる方法の妥當であることが判明するのである。尤も Wagner 氏の擧げてゐる説明例中には、本文に於て説明せる方法と同様に取扱はれてゐるものもあるのであるが、その考察の基礎が前記の如く不徹底なる點に於て未だ不満足なるものと考へられるのである。

第 V 章

Laplace 變換に對する再考察

§ V. 1. § I. 5 に對する吟味

§ I. 5 に於ては、Laplace 逆變換を利用して常係數線

型常微分方程式

$$f(D) F(t) \equiv \sum_{k=0}^n a_k D^k F(t) = G(t)$$

の一般解を求むる方法を述べ、更に §1.6 に於て、此の方法が結果から見て演算子法による解法と極めてよく類似したる點を持つ故に、此の類似點を利用して演算子法を擴張し得ることを説明して來たのであるが、此の際若し、上式に於ける函数 $G(t)$ が積分、

$$\int_a^b \varepsilon^{-\lambda t} G(t) dt, \quad (R_c(\lambda) > \mu_0)$$

をして、 $b \rightarrow \infty$ に於て収斂せしめざる如きものなるときは、叙上の Laplace 逆變換を利用する方法を直接適用することは不可能となるのである。たとへば微分方程式

$$(D^2 - 2)y = 4t^2 \varepsilon^{t^2}, \quad (-\infty < t < \infty) \quad (\text{V.1})$$

に於ては

$$\int_a^\infty \varepsilon^{-\lambda t} t^2 \varepsilon^{t^2} dt, \quad (R_c(\lambda) > \mu_0)$$

は發散する如きである。

然るに第 I 篇に於て説明せる演算子法による時は、これを次の如く簡単に解くことが出来るのである。即ち

(V.1) 式に $D-p$ 變換を施せば、 $p^{\infty} \cdot \equiv \int_a^t \cdot dt$ として

$$(p^2 - 2)y = 4t^2 \varepsilon^{t^2} + p y'(a) + p^2 y(a)$$

を得るから、この式の兩邊に $(p^2 - 2)^{-1}$ を作用せしめて

$$y = (p^2 - 2)^{-1} 4t^2 \varepsilon^{t^2} + p(p^2 - 2)^{-1} y'(a) + p^2(p^2 - 2)^{-1} y(a) \quad (\text{V.2})$$

$$= \varepsilon^{t^2} + \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} y'(a) - \sqrt{2} a \varepsilon^{a^2} \right\} \cdot$$

$$\cdot \sinh \sqrt{2} (t-a) + \left\{ y(a) - \varepsilon^{a^2} \right\} \cdot$$

$$\cdot \cosh \sqrt{2} (t-a)$$

が導かれるのである。(計算に就ては附録 (IV) を参照のこと)

上述の事實により、演算子法に於ては、演算子函数の被演算子として上記の $t^2 \varepsilon^{t^2}$ の如く $t = \infty$ に於て急速に増大する函数をも取扱へるのに反し、Laplace 變換法に於ては、Laplace 逆變換子の被變換函数としてかくの如く急速に増大する函数を對象とすることの出来ないことが判る。此の意味に於て、常係數線型常微分方程式の解法に關する限り、演算子法は Laplace 變換法より少しく一般的であるとも云へるのである。而して Laplace 變換法による演算子法の擴張は、演算子函数 $f(p)$ が、 p の有理函数である場合から適宜の條件の下に更に少しく一般的な函数の場合の取扱ひへの擴張と看做され得るのである。

§ V.2. Laplace 變換の間接的適用

前節に於て述べたる如く、微分方程式 (V.1) に對しては Laplace 變換法は是を直接に適用することは出来ないのであるが、次の如くすればこれを間接的に利用することが出来るのである。

今、 $U(t)$ を

$$U(t) = 0, \quad (t < a, t > b), \\ = 1, \quad (a < t < b)$$

なる函数として、(V.1) 式の兩邊にこれを用ひせしめれば、

$$U(t) (D^2 - 2)y = U(t) 4t^2 \varepsilon^{t^2}, \quad (-\infty < t < \infty) \quad (\text{V.3})$$

となるが、この式に $L_c(\lambda, t)^{-1}$ を作用せしめ、部分積分を施せば

$$\begin{aligned} L_c(\lambda, t)^{-1} U(t) D^2 y &\equiv \lambda \int_a^b \varepsilon^{-\lambda(t-a)} D^2 y dt \\ &\equiv \lambda \left\{ \varepsilon^{-\lambda(t-a)} D y \Big|_a^b + \lambda \int_a^b \varepsilon^{-\lambda(t-a)} D y dt \right\} \\ &\equiv \lambda \left\{ \varepsilon^{-\lambda(b-a)} y'_b - y'_a + \lambda \varepsilon^{-\lambda(b-a)} y_b - \lambda y_a \right. \\ &\quad \left. + \lambda^2 \int_a^b \varepsilon^{-\lambda(t-a)} y dt \right\} \\ &\equiv \lambda^2 L_c(\lambda, t)^{-1} U(t) y + \lambda \left\{ \varepsilon^{-\lambda(b-a)} (y'_b + \lambda y_b) \right. \\ &\quad \left. - (y'_a + \lambda y_a) \right\} \end{aligned}$$

なるにより、

$$\begin{aligned} (\lambda^2 - 2) L_c(\lambda, t)^{-1} U(t) y \\ = L_c(\lambda, t)^{-1} U(t) 4t^2 \varepsilon^{t^2} - \lambda \varepsilon^{-\lambda(b-a)} (y'_b + \lambda y_b) \\ + (y'_a + \lambda y_a) \end{aligned}$$

を得る。こゝに於て此の式の兩邊に $L_c(t, \lambda) (\lambda^2 - 2)^{-1}$ を作用せしめ、(II.16) 式を利用すれば、

$$\begin{aligned} U(t) y &= L_c(t, \lambda) (\lambda^2 - 2)^{-1} L_c(\lambda, t)^{-1} U(t) 4t^2 \varepsilon^{t^2} \\ &\quad - D(D^2 - 2)^{-1} (y'_b + D y_b) \mathbf{I} \left(\frac{t}{b} \right) \\ &\quad + D(D^2 - 2)^{-1} (y'_a + D y_a) \mathbf{I} \left(\frac{t}{a} \right) \\ &= (D^2 - 2)^{-1} \left\{ U(t) 4t^2 \varepsilon^{t^2} \right. \\ &\quad \left. + D(y'_a + D y_a) \mathbf{I} \left(\frac{t}{a} \right) - (D y'_b + D y_b) \mathbf{I} \left(\frac{t}{b} \right) \right\} \end{aligned}$$

が導かれる。こゝで $b \rightarrow \infty$ とすれば

$$\mathbf{I} \left(\frac{t}{b} \right) \rightarrow 0, \quad U(t) \rightarrow \mathbf{I} \left(\frac{t}{a} \right)$$

となるから、上式は結局

$$\begin{aligned} \mathbf{I} \left(\frac{t}{a} \right) y &= (D^2 - 2)^{-1} \left\{ 4t^2 \varepsilon^{t^2} \right. \\ &\quad \left. + D(y'_a + D y_a) \right\} \mathbf{I} \left(\frac{t}{a} \right) \\ &= \mathbf{I} \left(\frac{t}{a} \right) (p^2 - 2)^{-1} \left\{ 4t^2 \varepsilon^{t^2} + p(y'_a + p y_a) \right\} \end{aligned}$$

の如く、初より演算子法を用ひて得られたる (V.2) 式と同様の關係が得られる。従つて常微分方程式解法に關する限り、此の間接的方法是、演算子解法の簡單さに及ばさないものである。併し、準線型偏微分方程式の初期値並に境界値問題の内、上述の如き種類の函数を含むものゝ解法に對してはかゝる方法が考慮され得るであらう。

§ V.3. Laplace 變換の特異性

第 I 章に於て説明せる所より明かなる如く、Laplace

變換の特徴は、

- (1) 演算子解法と同様に、初期値問題を解く際に解法の初期に於て初期条件を考慮することが出来、従つて普通解法に於ける如く、解法の最終段階に於て積分常数を決定すると云ふ如き手續の省けること、

- (2) 演算子 $D \equiv \frac{d}{dt}$ (又は $\frac{\partial}{\partial t}$) を代數化し得ること

等にあることが推察されるが、かゝる性質を持つ變換が果して Laplace 變換以外にも存在するか否かを吟味してみることとする。

準線型偏微分方程式

$$f\left(X, \frac{\partial}{\partial X}; D\right) F(X, t) = G(X, t), \quad \left(\begin{array}{l} -\infty < t < \infty, \\ X_0 < X < X_1 \end{array}\right) \quad (\text{V.4})$$

を、 $t=a$ に於ける $D^k F(X, t)$ ($k=0, 1, 2, \dots, n-1$) が豫め與へられたる値に等しき條件及び適當なる境界條件の下に解くことを考へてみる。こゝに

$$f\left(X, \frac{\partial}{\partial X}; D\right) \equiv \sum_{k=0}^n a_k \left(X, \frac{\partial}{\partial X}\right) D^k.$$

であり、又 $X, \frac{\partial}{\partial X}$ 等は夫々 $x, y, z, \dots; \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \dots$ 等の代表とする。(今後は簡單の爲、 $X_0 < X < X_1$ なる條件を省いておく。)

先づ、次の如き性質を持つ變換子 $T(\lambda, t)^{-1}$ 及び $T(t, \lambda)$ を導入する。

$$T(t, \lambda) T(\lambda, t)^{-1} \equiv T(\lambda, t)^{-1} T(t, \lambda) \equiv 1, \quad (\text{V.5})$$

$$\begin{aligned} T(\lambda, t)^{-1} f\left(X, \frac{\partial}{\partial X}; D\right) F(X, t) \\ \equiv f\left(X, \frac{\partial}{\partial X}; \lambda\right) T(\lambda, t)^{-1} F(X, t) \\ + C\left(\frac{a}{t}\right) g\left(X, \frac{\partial}{\partial X}; \lambda, D\right) F(X, t). \end{aligned} \quad (\text{V.6})$$

茲に、 $C\left(\frac{a}{t}\right) g\left(X, \frac{\partial}{\partial X}; \lambda, D\right) F(X, t)$ は $t=a$ に於ける條件を満す項、 λ は任意の parameter とする。かゝる變換子の一組は Laplace 順逆變換子なることは既述の事柄より明かであるが、實は此の Laplace 變換子が唯一のものであることが次の如くして云へるのである。

(V.4) 式の左邊に $D-p$ 變換を施せば、

$$\begin{aligned} f\left(X, \frac{\partial}{\partial X}; D\right) F(X, t) \\ \equiv f\left(X, \frac{\partial}{\partial X}; p\right) F(X, t) \\ - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \left(X, \frac{\partial}{\partial X}\right) p^{k+1} C\left(\frac{a}{t}\right) D^{n-k-1} F(X, t) \end{aligned}$$

となるが、此の式の兩邊に $T(\lambda, t)^{-1}$ を作用せしめ、その左邊に對して (V.6) 式の關係を適用すれば、

$$f\left(X, \frac{\partial}{\partial X}; \lambda\right) T(\lambda, t)^{-1} F(X, t)$$

$$\begin{aligned} + C\left(\frac{a}{t}\right) g\left(X; \frac{\partial}{\partial X}; \lambda, D\right) F(X, t) \\ \equiv T(\lambda, t)^{-1} f\left(X, \frac{\partial}{\partial X}; p\right) F(X, t) \\ - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \left(X, \frac{\partial}{\partial X}\right) \left[C\left(\frac{a}{t}\right) D^{n-k-1} F(X, t) \right] \\ \cdot T(\lambda, t)^{-1} p^{k+1} \cdot 1 \dots \dots \dots (\text{V.7}) \end{aligned}$$

となる。従つて先づ左右兩邊の各第一項より

$$\begin{aligned} f\left(X, \frac{\partial}{\partial X}; \lambda\right) T(\lambda, t)^{-1} \\ \equiv T(\lambda, t)^{-1} f\left(X, \frac{\partial}{\partial X}; p\right) \dots \dots \dots (\text{V.8}) \end{aligned}$$

が得られるが、この關係を右邊の第二項に適用すれば、

$$T(\lambda, t)^{-1} p^{k+1} \cdot 1 \equiv \lambda^k T(\lambda, t)^{-1} \rho(t-a) \dots (\text{V.9})$$

が導かれる。こゝに

$$\rho(t-a) \equiv p \cdot 1$$

である。而して、(V.7) 式の兩邊の各第二項を比較すれば、

$$T(\lambda, t)^{-1} \rho(t-a) \equiv \varphi(\lambda, a) \dots \dots \dots (\text{V.10})$$

が得られる。こゝに $\varphi(\lambda, a)$ は函數 $\varphi(\lambda, t)$ の $t=a$ に於ける値である。然るに ρ -函數の性質から

(I, § VII.4 参照)

$$\int_a^{t_1} \varphi(\lambda, t) \rho(t-a) dt \equiv \varphi(\lambda, a), \quad (t_1 \neq a) \quad (\text{V.11})$$

であるから、 $T(\lambda, t)^{-1}$ は

$$T(\lambda, t)^{-1} \equiv \int_a^{t_1} \varphi(\lambda, t) \cdot dt \dots \dots \dots (\text{V.12})$$

と表はせることが判る。而して上述の議論が

$$DF(t) = G(t), \quad (-\infty < t < \infty) \dots \dots \dots (\text{V.13})$$

の如き最も簡單なる問題にも適用さるべきことから、 t_1 及び函數 $\varphi(\lambda, t)$ の形が決定される。即ち (V.13) 式に (V.12) 式の關係を作用させれば先づ部分積分により、

$$\begin{aligned} \int_a^{t_1} \varphi(\lambda, t) DF(t) dt &\equiv \left[F(t) \varphi(\lambda, t) \right]_a^{t_1} \\ &\quad - \int_a^{t_1} \left(\frac{\partial}{\partial t} \varphi(\lambda, t) \right) F(t) dt \end{aligned}$$

が得られ、又、(V.8) 式により

$$\begin{aligned} \int_a^{t_1} \varphi(\lambda, t) DF(t) dt \\ \equiv \int_a^{t_1} \varphi(\lambda, t) \left(p - p C\left(\frac{a}{t}\right) \right) F(t) dt \\ \equiv \lambda \int_a^{t_1} \varphi(\lambda, t) F(t) dt - \lambda F(a) \int_a^{t_1} \varphi(\lambda, t) dt \end{aligned}$$

となる故、上の兩式の右邊を比較すれば、

$$\varphi(\lambda, t_1) \equiv 0, \quad \dots \dots \dots (\text{V.14})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(\lambda, t) \equiv -\lambda \varphi(\lambda, t), \quad \dots \dots \dots (\text{V.15})$$

$$\varphi(\lambda, a) \equiv \lambda \int_a^{t_1} \varphi(\lambda, t) dt \quad \dots \dots \dots (\text{V.16})$$

なる關係が導かれる。而して (V.16) 式は (V.14) 及び (V.15) 兩式より容易に誘導され得る故、 t_1 及び $\varphi(\lambda, t)$ の決定には (V.14) 式及び (V.15) 式にて充分である。

扱、(V.15) 式を積分すれば、

$$\varphi(\lambda, t) \equiv \varphi(\lambda) \varepsilon^{-\lambda(t-a)}$$

となるが、一般に $R_c(\lambda) > 0$ 及び $t > a$ なる条件を附加したとすれば、(この条件は $F(t)$ の性質により多少變更され得ることは §I.3 に於て述べたと同様である)、

$$t_1 = +\infty$$

とすることが出来る。従つて、適宜の条件の下では

$$T(\lambda, t)^{-1} \equiv \varphi(\lambda) \int_a^\infty \varepsilon^{-\lambda(t-a)} \cdot dt, \quad (R_c(\lambda) > 0)$$

の如くに表はされるのであるが、これ即ち Laplace 逆變換に他ならない。かくて吾々は、(V.5) 式及び (V.6) 式なる關係を満足する變換子としては Laplace 順逆變換子以外には考へ得られないことを知るのである。

第 VI 章

種々の計算例

本章に於ては、前章迄に説明せる所を利用して、此の方面の文献に現はれる代表的な例に就て計算を試みよう。

以下便宜上 $p^{-1} \equiv \int_0^t dt$, ($t > 0$) とする。

尚

$$f(\lambda) \equiv \lambda \int_0^\infty \varepsilon^{-\lambda t} F(t) dt, \quad (R_c(\lambda) > 0)$$

なる關係にある $f(\lambda)$ と $F(t)$ とに關する公式に就ては文献 (17) を参照され度い。*(脚註)

§VI.1. $f(p) \cdot 1 \equiv p(p^2 + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1$ の計算

(1) 乘級數展開:

$$\begin{aligned} p(p^2 + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \alpha^{2n} p^{-2n} \cdot 1 \\ &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{\alpha t}{2}\right)^{2n} \\ &\equiv J_0(\alpha t). \dots\dots\dots(VI.1) \end{aligned}$$

(2) 漸近級數展開:

$$\begin{aligned} p(p^2 + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 &\equiv \mathfrak{S}_0(t, \lambda) \lambda(\lambda^2 + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad + \mathfrak{S}_{ja}(t, \lambda) \lambda(\lambda^2 + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad + \mathfrak{S}_{-ja}(t, \lambda) \lambda(\lambda^2 + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &\equiv \varepsilon^{jat} (D + j\alpha)^{-1} \mathfrak{S}_0(t, \lambda) (\lambda + j\alpha) \cdot \\ &\quad \cdot \left\{ (\lambda + j\alpha)^2 + \alpha^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + (\text{共軛値}) \end{aligned}$$

* 脚註: 此の文献中に於ても $p \equiv \frac{d}{dt}$ なる考へをとつてゐる結果、誤謬のある箇所が間々ある故注意を要する。たとへば $f(p) \cdot 1 \equiv F(t)$ としてある時、若し $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda) \sim \lambda^n$ ($n \geq 1$) となる如き時、或は $F(t)$ が $t=0$ に於て積分可能ならざるものが存在する時等は、その關係はすべて正しくない。その一例に就ては §VI.6 に於て説明する所がある。

$$\begin{aligned} &\sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} R_c \left[\varepsilon^{jat} (D + j\alpha)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t}} \right] \\ &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha}} \left\{ \cos\left(\alpha t - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \right. \\ &\quad \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (4n-1)}{(2n)!} \left(\frac{D}{4\alpha}\right)^{2n} \\ &\quad \left. - \sin\left(\alpha t - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \right. \\ &\quad \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (4n+1)}{(2n+1)!} \left(\frac{D}{4\alpha}\right)^{2n+1} \left. \right\} \frac{1}{\sqrt{t}} \\ &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha t}} \left\{ C \cos\left(\alpha t - \frac{\pi}{4}\right) \right. \\ &\quad \left. + S \sin\left(\alpha t - \frac{\pi}{4}\right) \right\}. \dots\dots\dots(VI.2) \end{aligned}$$

茲に、

$$\begin{aligned} C &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (4n-1)\}^2}{(2n)!} \left(\frac{1}{8\alpha t}\right)^{2n} \\ S &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (4n+1)\}^2}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{8\alpha t}\right)^{2n+1} \end{aligned}$$

§VI.2. $f(p) \cdot 1 \equiv p(p^2 - \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1$ の計算

前節の場合と同様にして、

$$\begin{aligned} p(p^2 - \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 &\equiv J_0(j\alpha t) \\ &\equiv I_0(\alpha t) \\ &\sim \sqrt{\frac{1}{2\pi \alpha t}} (A \varepsilon^{at} + jB \varepsilon^{-at}). \dots\dots\dots(V.3) \end{aligned}$$

茲に、

$$\begin{aligned} A &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\}^2}{n!} \left(\frac{1}{8\alpha t}\right)^n \\ B &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\}^2}{n!} \left(\frac{1}{8\alpha t}\right)^n \end{aligned}$$

である。こゝで t が充分大なることを考へれば、 $\alpha > 0$ なる時は ε^{-at} , $\alpha < 0$ なる時は ε^{at} が夫々他より速かに零に近づくから

$$\begin{aligned} I_0(\alpha t) &\sim \frac{\varepsilon^{|\alpha|t}}{\sqrt{2\pi|\alpha|t}} \\ &\quad \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\}^2}{n!} \left(\frac{1}{8|\alpha|t}\right)^n \end{aligned}$$

.....(VI.4)

と書けるのである。

§VI.3. $f(p) \cdot 1 \equiv (p\sqrt{p} + 1)^{-1} \cdot 1$ の計算

(1) 乘級數展開:

$$\begin{aligned} (p\sqrt{p} + 1)^{-1} \cdot 1 &\equiv \left(1 - \frac{1}{p\sqrt{p}} + \frac{1}{p^{\frac{3}{2}}} - \dots\right) \cdot \\ &\quad \cdot \frac{1}{p\sqrt{p}} \cdot 1 \\ &\equiv \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (6n+3)} t^{3n} \end{aligned}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(3n)!} \dots\dots\dots (\text{VI.5})$$

(2) 漸近級数展開:

$$\frac{f(\lambda)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda(\lambda\sqrt{\lambda}+1)}$$

の異常点は、 $\lambda=c$ に於て $\arg \lambda=0$ としてあるから

$\alpha_0=0$: 極及び分岐点、

$$\alpha_1, \alpha_2 = \epsilon^{\pm j \frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2}: \text{極}$$

となつてゐる。よつて

$$f(p) \cdot 1 = \left\{ \mathfrak{W}_0(t, \lambda) + \mathfrak{W}_{\alpha_1}(t, \lambda) + \mathfrak{W}_{\alpha_2}(t, \lambda) \right\}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda\sqrt{\lambda}+1} \\ & \equiv \mathfrak{W}_0(t, \lambda) \frac{1}{\lambda\sqrt{\lambda}+1} \\ & + 2R_e \left\{ \mathfrak{W}_{\alpha_1}(t, \lambda) \frac{1}{\lambda\sqrt{\lambda}+1} \right\} \end{aligned}$$

であるが、

$$\begin{aligned} & \mathfrak{W}_0(t, \lambda) \frac{1}{\lambda\sqrt{\lambda}+1} \\ & \sim \mathfrak{W}_0(t, \lambda) (1 - \lambda\sqrt{\lambda} + \lambda^2 - \lambda^3\sqrt{\lambda} + \dots\dots\dots) \\ & \sim 1 - D(1 + D^2 + D^4 + \dots\dots\dots) \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \\ & \sim 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (6n+1)}{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2} t^{-3n-1} \end{aligned}$$

及び

$$\begin{aligned} & \mathfrak{W}_{\alpha_1}(t, \lambda) \frac{1}{\lambda\sqrt{\lambda}+1} \equiv \epsilon^{\alpha_1 t} D(D + \alpha_1)^{-1} \cdot \\ & \quad \cdot \mathfrak{W}_0(t, \lambda) \frac{1}{(\lambda + \alpha_1)^{\frac{3}{2}} + 1} \\ & \equiv \epsilon^{\alpha_1 t} D(D + \alpha_1)^{-1} \mathfrak{W}_0(t, \lambda) \cdot \\ & \quad \cdot \frac{(\lambda + \alpha_1)^{\frac{3}{2}} - 1}{\lambda(\lambda^2 + 3\alpha_1\lambda + 3\alpha_1^2)} \\ & \equiv \frac{\epsilon^{\alpha_1 t}}{3\alpha_1^2} \frac{1}{\alpha_1 + D} (\alpha_1\sqrt{\alpha_1} - 1) \\ & \sim -\frac{2}{3} \epsilon^{-\frac{t}{2}} \epsilon^{j\frac{\sqrt{3}}{2}t} \end{aligned}$$

の如く計算されるから、

$$\begin{aligned} f(p) \cdot 1 & \sim 1 - \frac{4}{3} \epsilon^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ & + \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (6n+1)}{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2} t^{-3n-1} \\ & \dots\dots\dots (\text{VI.6}) \end{aligned}$$

が得られる。

§ VI. 4.

§§ VI. 4. 1.

$$\begin{aligned} & \frac{D}{\sqrt{D^2 + \alpha^2}} \epsilon^{-\beta\sqrt{D^2 + \alpha^2}} I\left(\frac{t}{0}\right) \\ & \equiv I\left(\frac{t}{\beta}\right) J_0(\alpha\sqrt{t^2 - \beta^2}) \dots\dots\dots (\text{VI.7}) \end{aligned}$$

§§ VI. 4. 2.

$$\begin{aligned} & \epsilon^{-\beta\sqrt{D^2 + \alpha^2}} I\left(\frac{t}{0}\right) \\ & \equiv I\left(\frac{t}{\beta}\right) \left\{ 1 - \alpha\beta \int_{\beta}^t \frac{J_1(\alpha\sqrt{t^2 - \beta^2})}{\sqrt{t^2 - \beta^2}} dt \right\} \dots\dots\dots (\text{VI.8}) \end{aligned}$$

但し、 α 及び β は實常数であり、又

$$\begin{aligned} & I\left(\frac{t}{0}\right) J_n(\alpha t) \\ & \equiv \frac{D}{\sqrt{D^2 + \alpha^2}} \left(\frac{\sqrt{D^2 + \alpha^2} - D}{\alpha} \right)^n I\left(\frac{t}{0}\right) \end{aligned}$$

を既知とする⁽¹⁸⁾。

證明:

§§ VI. 4. 1.

$$\begin{aligned} & \frac{D}{\sqrt{D^2 + \alpha^2}} \epsilon^{-\beta\sqrt{D^2 + \alpha^2}} I\left(\frac{t}{0}\right) \\ & \equiv \epsilon^{-\beta D} \frac{D}{\sqrt{D^2 + \alpha^2}} \epsilon^{-\beta(\sqrt{D^2 + \alpha^2} - D)} I\left(\frac{t}{0}\right) \end{aligned}$$

であるが、此の内

$$\begin{aligned} & \frac{D}{\sqrt{D^2 + \alpha^2}} \epsilon^{-\beta(\sqrt{D^2 + \alpha^2} - D)} I\left(\frac{t}{0}\right) \\ & \equiv \frac{D}{\sqrt{D^2 + \alpha^2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{\beta^n}{n!} \cdot \\ & \quad \cdot (\sqrt{D^2 + \alpha^2} - \alpha)^n I\left(\frac{t}{0}\right) \\ & \equiv I\left(\frac{t}{0}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{\alpha^n \beta^n}{n!} J_n(\alpha t) \\ & \equiv I\left(\frac{t}{0}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{\alpha^n \beta^n}{n!} \cdot \\ & \quad \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-)^m}{m!(n+m)!} \left(\frac{\alpha t}{2}\right)^{n+2m} \\ & \equiv I\left(\frac{t}{0}\right) \sum_{k=0}^{\infty} (-)^k \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{\alpha\sqrt{t(t+2\beta)}}{2}\right)^{2k} \\ & \equiv I\left(\frac{t}{0}\right) J_0\left[\alpha\sqrt{t(t+2\beta)}\right] \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} & \frac{D}{\sqrt{D^2 + \alpha^2}} \epsilon^{-\beta\sqrt{D^2 + \alpha^2}} I\left(\frac{t}{0}\right) \\ & \equiv \epsilon^{-\beta D} I\left(\frac{t}{0}\right) J_0\left(\alpha\sqrt{t(t+2\beta)}\right) \\ & \equiv I\left(\frac{t}{\beta}\right) J_0\left(\alpha\sqrt{t^2 - \beta^2}\right) \cdot q.e.d. \end{aligned}$$

§§ VI. 4. 2.

$$\begin{aligned} & \epsilon^{-\beta\sqrt{D^2 + \alpha^2}} I\left(\frac{t}{0}\right) \\ & \equiv -D^{-1} \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \frac{D}{\sqrt{D^2 + \alpha^2}} \epsilon^{-\beta\sqrt{D^2 + \alpha^2}} \right\} I\left(\frac{t}{0}\right) \\ & \equiv -D^{-1} \frac{\partial}{\partial \beta} I\left(\frac{t}{\beta}\right) J_0(\alpha\sqrt{t^2 - \beta^2}) \\ & \equiv -D^{-1} \left\{ I\left(\frac{t}{\beta}\right) \frac{\partial}{\partial \beta} J_0(\alpha\sqrt{t^2 - \beta^2}) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -J_0(\alpha\sqrt{t^2-\beta^2}) I\left(\frac{t}{\beta}\right) \rho(t-\beta) \Big\} \\
& \equiv -I\left(\frac{t}{\beta}\right) \Big\{ \alpha\beta \int_{\beta}^t \frac{J_1(\alpha\sqrt{t^2-\beta^2})}{\sqrt{t^2-\beta^2}} dt \\
& \quad - \int_{\beta}^t J_0(\alpha\sqrt{t^2-\beta^2}) \rho(t-\beta) dt \Big\} \\
& \equiv I\left(\frac{t}{\beta}\right) \Big\{ 1 - \alpha\beta \int_{\beta}^t \frac{J_1(\alpha\sqrt{t^2-\beta^2})}{\sqrt{t^2-\beta^2}} dt \Big\}.
\end{aligned}$$

q.e.d.

§ VI. 5.

$$\left(\log \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \right) \cdot 1 \equiv \int_0^t \frac{\sin^2 \frac{t}{2}}{t} dt + \log t + \gamma,$$

(γ は Euler の常數)

の漸近展開:

$$\begin{aligned}
L_c(t, \lambda) \log \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \\
& \simeq -\frac{1}{2} \left\{ \mathfrak{N}_0(t, \lambda) \log(1+\lambda^2) \right. \\
& \quad \left. + 2R_c \varepsilon^{jt} D(D+j)^{-1} \mathfrak{N}_0(t, \lambda) \cdot \right. \\
& \quad \left. \cdot \log[1+(\lambda+j)^2] \right\} \\
& \sim -R_c \left[\varepsilon^{jt} j \sum_{n=0}^{\infty} (jD)^n \frac{1}{t} \right] \\
& \sim -R_c \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{n!}{t^{n+1}} \varepsilon^{j(t+\frac{n+1}{2}\pi)} \right)
\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
\left(\log \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \right) \cdot 1 & \sim \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{n!}{t^{n+1}} \cdot \\
& \quad \cdot \cos\left(t + \frac{n+1}{2}\pi\right) \\
& \sim \frac{\sin t}{t} P - \frac{\cos t}{t} Q. \dots\dots\dots(VI. 9)
\end{aligned}$$

但し、 P 及び Q は前節の例と同様である。

扱、一方、

$$Ci(t) \equiv \int_{\infty}^t \frac{\cos t}{t} dt$$

に順次部分積分を施せば、

$$Ci(t) \sim \frac{\sin t}{t} P - \frac{\cos t}{t} Q$$

なることは容易にわかる。故に $\left(\log \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \right) \cdot 1$ と $Ci(t)$ とは或る関係を有する筈である。これを求めてみるに、

$$\begin{aligned}
\lambda \int_0^{\infty} \varepsilon^{-\lambda t} dt \int_t^{\infty} \frac{\cos \tau}{\tau} d\tau & \equiv \lambda \int_0^{\infty} \frac{\cos \tau}{\tau} d\tau \int_0^{\tau} \varepsilon^{-\lambda t} dt \\
& \equiv \int_0^{\infty} \frac{\cos \tau}{\tau} (1 - \varepsilon^{-\lambda \tau}) d\tau \\
& \equiv \log \sqrt{1+\lambda^2} \quad (19)
\end{aligned}$$

なる故、結局

$$\begin{aligned}
\left(\log \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \right) \cdot 1 & \equiv \int_{\infty}^t \frac{\cos t}{t} dt \\
& \equiv Ci(t)
\end{aligned}$$

なる結果が得られるのである。

§ VI. 6.

$$\begin{aligned}
\left[p \log \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{p^2}} \right) \right] \cdot 1 \\
\equiv \frac{1}{t} (1 - J_0(\alpha t)) \dots\dots\dots(VI. 10)
\end{aligned}$$

證明:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\log \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{p^2}} \right) \right] \cdot 1 \\
\equiv \frac{\alpha}{\sqrt{p^2 + \alpha^2}} \frac{1}{p + \sqrt{p^2 + \alpha^2}} \cdot 1 \\
\equiv p^{-1} J_1(\alpha t)
\end{aligned}$$

なる故、

$$\begin{aligned}
\left[\log \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{p^2}} \right) \right] \cdot 1 & \equiv p^{-1} \int^{\alpha} J_1(\alpha t) d\alpha \\
& \equiv p^{-1} \frac{1}{t} \int^{\alpha t} J_1(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

となるが、この式で $\alpha=0$ とおくと

$$\log 2 \equiv p^{-1} \frac{1}{t} \int_0^0 J_1(\tau) d\tau$$

が得られる。よつて

$$\begin{aligned}
\left[\log \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{p^2}} \right) \right] \cdot 1 \\
\equiv p^{-1} \frac{1}{t} \int_0^{\alpha t} J_1(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

然るに

$$J_0'(x) \equiv -J_1(x)$$

であるから、

$$\begin{aligned}
\left[\log \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{p^2}} \right) \right] \cdot 1 \\
\equiv p^{-1} \frac{1}{t} (1 - J_0(\alpha t))
\end{aligned}$$

又は

$$\begin{aligned}
\left[p \log \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{p^2}} \right) \right] \cdot 1 \\
\equiv \frac{1}{t} (1 - J_0(\alpha t))
\end{aligned}$$

が導かれる。

これを文献 (17) の 510 頁に於ける如く

$$\left[p \log (p + \sqrt{p^2 + \alpha^2}) \right] \cdot 1 \equiv \frac{J_0(\alpha t)}{t} \dots\dots\dots(VI. 11)$$

とすることは誤である。何となれば (VI. 11) 式の關係が正しいものとすれば、この式に於て $\alpha=0$ とおいた關係

$$\left(p \log 2p \right) \cdot 1 \equiv -\frac{1}{t}$$

でなければならないことになるが、此の關係の正しくないことは (III. 25) 式より見て明かである。従つて

(VI. 11) 式の關係も正しくないことがわかる。

以上の所論は又、

$$\left[p \log \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{p^2}} \right) \right] \cdot 1 \\ \equiv \frac{1}{t} (1 - I_0(\alpha t))$$

に關しても同様である。

§ VI. 7.

§ IV. 4 に於て述べたる所に従へば、

$$\frac{D}{\epsilon^D - 1} \cdot \approx \left(1 - \frac{D}{2} + \frac{B_1}{2!} D^2 - \frac{B_3}{4!} D^4 + \frac{B_5}{6!} D^6 - + \dots \right) \dots \dots \dots (VI. 12)$$

である。こゝに B_{2n-1} ($n=1, 2, 3, \dots$) は所謂 Bernoulli の數で

$$B_{2n-1} = \frac{2 \cdot (2n)!}{(2\pi)^{2n}} \left(1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \dots \right)$$

即ち

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = \frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{1}{42},$$

$$B_7 = \frac{1}{30}, \quad B_9 = \frac{5}{66}, \dots \dots \dots$$

である。

一方、第 I 篇の § III. 5 に於て述べたる所によれば、定差演算子 Δ を

$$\Delta F(t) \equiv F(t+1) - F(t)$$

によつて定義する時、

$$\Delta \cdot \equiv (\epsilon^D - 1) \cdot \dots \dots \dots (VI. 13)$$

であるから、これと (VI. 12) 式とより

$$\Delta^{-1} \cdot \equiv \frac{1}{\epsilon^D - 1} \cdot \approx \left(D^{-1} - \frac{1}{2} + \frac{B_1}{2!} D - \frac{B_3}{4!} D^3 + \frac{B_5}{6!} D^5 - + \dots \right) \cdot \dots \dots (VI. 14)$$

となる。今

$$\sum u_i \equiv u_{i-1} + u_{i-2} + \dots + u_1, \\ (u_a \text{ は此の級數の固定項})$$

とし、又 C を任意の常數とすると、

$$\left(\left(\sum u_{i+1} \right) - C \right) - \left(\left(\sum u_i \right) - C \right) \\ \equiv \Delta \left(\left(\sum u_i \right) - C \right) \\ \equiv u_i$$

なる故、

$$\Delta^{-1} u_i \equiv \sum u_i - C \dots \dots \dots (VI. 15)$$

なる關係を得る。これに (VI. 14) 式の關係を代入すれば

$$\sum u_i \approx C + \left(D^{-1} - \frac{1}{2} + \frac{B_1}{2!} D - \frac{B_3}{4!} D^3 + \frac{B_5}{6!} D^5 - + \dots \right) u_i \dots \dots (VI. 16)$$

が得られるのである。

例 1. $u_i \equiv \frac{1}{t}$ とおけば、

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{t} \\ \approx \frac{1}{t} + C + \left(D^{-1} - \frac{1}{2} + \frac{B_1}{2!} D - \frac{B_3}{4!} D^3 + \dots \right) \frac{1}{t} \\ \approx C + \log t + \frac{1}{2t} - \frac{B_1}{2} \frac{1}{t^2} \\ + \frac{B_3}{4} \frac{1}{t^4} - \frac{B_5}{6} \frac{1}{t^6} + \dots \dots$$

となる。而して C は

$$C \approx \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{t} - \log t \right) \\ = \gamma, \quad (\gamma \text{ は Euler の常數})$$

の如く定められる。よつて

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{t} \approx \gamma + \log t + \frac{1}{2t} \\ - \frac{B_1}{2} \frac{1}{t^2} + \frac{B_3}{4} \frac{1}{t^4} - \frac{B_5}{6} \frac{1}{t^6} + \dots \dots$$

が得られる。

例 2. $u_i \equiv \frac{1}{t^n}$, ($n > 1$) とおけば、

$$\frac{1}{1^{2m}} + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \dots + \frac{1}{t^{2m}} \\ \approx \frac{(2\pi)^{2m}}{2(2m)!} B_{2m-1} + \frac{1}{t^{2m}} - \frac{1}{2m-1} \frac{1}{t^{2m-1}} \\ - \frac{1}{2t^{2m}} - \frac{B_1}{2!} \frac{1}{t^{2m+1}} \\ + \frac{2m(2m+1)(2m+2)B_3}{4!} \frac{1}{t^{2m+3}} + \dots, \\ (m=1, 2, 3, \dots)$$

及び

$$\frac{1}{1^{2m+1}} + \frac{1}{2^{2m+1}} + \dots + \frac{1}{t^{2m+1}} \\ \approx \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m+1}} + \frac{1}{2m} \frac{1}{t^{2m}} - \frac{1}{2t^{2m+1}} \\ - \frac{B_1}{2!} \frac{1}{t^{2m+2}} + \frac{(2m+1)(2m+2)(2m+3)B_3}{4!} \frac{1}{t^{2m+4}} + \dots$$

が得られる。

例 3. $u_i \equiv t^n$ ($n \geq 1$) とおけば

$$1^n + 2^n + 3^n + \dots + t^n \\ \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} (t^{n+1} - 1) + \frac{t^n}{2} \\ + \frac{B_1}{2!} n(t^{n-1} - 1) \\ - \frac{B_3}{4!} n(n-1)(n-2)(t^{n-3} - 1) + \dots$$

となる。たとへば

$$n=1: 1+2+3+\dots+t \equiv \frac{t(t+1)}{2}, \\ n=2: 1^2+2^2+3^2+\dots+t^2 \equiv \frac{t(t+1)(2t+1)}{6},$$

$$n=3: 1^3+2^3+3^3+\cdots+t^3\equiv\frac{t^2(t+1)^2}{4}$$

$$\equiv[1+2+3+\cdots+t]^2$$

の如くである。

例 4. $u_t \equiv \log t$ とおけば

$$\log 1 + \log 2 + \cdots + \log t \equiv \log \Gamma(t+1)$$

$$\simeq \frac{1}{2} \log \sqrt{2\pi} - t + t \log t + \frac{1}{2} \log t$$

$$+ \frac{B_1}{1 \cdot 2} \frac{1}{t} - \frac{B_3}{3 \cdot 4} \frac{1}{t^3} + \frac{B_5}{5 \cdot 6} \frac{1}{t^5} - + \cdots$$

$$\cdots \cdots \cdots (VI.17)$$

が得られる。従つて又、

$$\Gamma(t+1) \simeq \sqrt{2\pi t} t^t e^{-t} \epsilon^{\frac{1}{12t}} \epsilon^{-\frac{1}{360t^3}} \epsilon^{\frac{1}{1260t^5}} \cdots$$

$$\simeq \sqrt{2\pi t} t^t e^{-t} \left(1 + \frac{1}{12t} + \frac{1}{288t^2} \right.$$

$$\left. - \frac{139}{51840t^3} - + \cdots \right) \cdots \cdots (VI.18)$$

なる關係が得られる。

尙、(VI.17) 式、従つて (VI.18) 式の關係は t が充分大なる任意の實變數の場合にも成立つものである⁽²⁰⁾。

§ VI. 8. $F(t) \equiv \mathfrak{N}_0(t, \lambda) \log \lambda \left(\coth \frac{\lambda}{2} - \frac{2}{\lambda} \right)$ の計算

$$\coth \frac{\lambda}{2} \equiv \frac{2}{\epsilon^{\lambda}-1} + 1$$

なる故、

$$F(t) \equiv \mathfrak{N}_0(t, \lambda) \log \lambda \left(\frac{2}{\epsilon^{\lambda}-1} + 1 - \frac{2}{\lambda} \right)$$

$$\equiv \frac{2}{\epsilon^{\lambda}-1} \mathfrak{N}_0(t, \lambda) \log \lambda + \mathfrak{N}_0(t, \lambda) \log \lambda$$

$$- \mathfrak{N}_0(t, \lambda) \frac{\log \lambda}{\lambda}$$

$$\simeq 2 \left(D^{-1} - \frac{1}{2} + \frac{B_1}{2!} D - \frac{B_3}{4!} D^3 \right. \\ \left. + \frac{B_5}{6!} D^5 - + \cdots \right) (\log p \cdot 1)$$

$$+ (\log p) \cdot 1 - \frac{2}{D} (\log p \cdot 1)$$

$$\simeq 2 \left(\frac{B_1}{2!} D - \frac{B_3}{4!} D^3 + \frac{B_5}{6!} D^5 - + \cdots \right) \cdot$$

$$\cdot (-\gamma - \log t)$$

$$\sim -2 \left(\frac{B_1}{1 \cdot 2} \frac{1}{t} - \frac{B_3}{3 \cdot 4} \frac{1}{t^3} \right.$$

$$\left. + \frac{B_5}{5 \cdot 6} \frac{1}{t^5} - + \cdots \right)$$

であるが、前節の結果によれば

$$\log \Gamma(t+1) \equiv \log t + \log \Gamma(t)$$

$$\sim \frac{1}{2} \log 2\pi - t + t \log t + \frac{1}{2} \log t$$

$$+ \frac{B_1}{1 \cdot 2} \frac{1}{t} - \frac{B_3}{3 \cdot 4} \frac{1}{t^3} + \cdots$$

なる故、

$$F(t) \equiv \mathfrak{N}_0(t, \lambda) \log \lambda \left(\coth \frac{\lambda}{2} - \frac{2}{\lambda} \right)$$

$$\sim -2 \log \Gamma(t) + 2t(\log t - 1)$$

$$- \log t + \log 2\pi$$

となる。

§ VI. 9.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) y = 0, \quad \begin{pmatrix} t > 0, \\ -\infty < x < \infty \end{pmatrix}$$

を初期條件

$$C \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} y = F(x), \quad (-\infty < x < \infty)$$

の下に解け。

解:

(III.14) 式の關係を利用すれば容易に、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \cdot \equiv \epsilon^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial t} \epsilon^{-t} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cdot$$

$$\equiv \epsilon^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} p \epsilon^{-t} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cdot - \epsilon^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} p C \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \cdot$$

が導かれる。(附録(V)を参照のこと)

よつて上の微分方程式は

$$\left(\epsilon^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} p \epsilon^{-t} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) y = \epsilon^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} p F(x)$$

となるが、兩邊に $\epsilon^{-t} \frac{\partial^2}{\partial x^2} p^{-1}$ を作用せしめ、再び

(III.14) 式の關係を利用すれば、

$$y = \epsilon^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x+2\sqrt{t}u) \epsilon^{-u^2} du,$$

$$\begin{pmatrix} t > 0, \\ -\infty < x < \infty \end{pmatrix}$$

なる解が得られるのである。これを簡單には次の様にも記述することが出来る。即ち原方程式並に初期條件により、微分方程式に $D-p$ 變換を施せば

$$\left(p - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) y = p F(x)$$

となる故、

$$y = \frac{p}{p - \frac{\partial^2}{\partial x^2}} F(x)$$

$$= \epsilon^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x+2\sqrt{t}u) \epsilon^{-u^2} du,$$

$$\begin{pmatrix} t > 0, \\ -\infty < x < \infty \end{pmatrix}.$$

第 VII 章

結 言

(1) 先づ Laplace 變換の概念を明かにし、然る後、演算子法との關聯が如何にして得られるかを説明した。而してかかる關聯の下に演算子法はその適用範圍を、常係數線型常微分方程式の解法より更に進んで、準線型偏微分方程式の解法に擴張せられべきこと、従つて p を Heaviside の演算子とする時、演算子函数 $f(p)$ が必ずしも p の有理函数に非ざる場合の演算子算法の得らるべきことを述べた。尙、此の擴張の手段を與へるこ

とを以て直ちに演算子算法の基礎は Laplace 變換にあるとすることの妥當ならざる所以をも明かにした。

(2) かいゝる演算子算法の擴張に便利に使用され得べき Laplace 變換子の形は

$$L_c(t, \lambda) \equiv \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{e^{(t-a)\lambda}}{\lambda} \cdot d\lambda, \quad (c > 0),$$

$$L_c(\lambda, t)^{-1} \equiv \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda(t-a)} \cdot dt, \quad (R_c(\lambda) > \mu_0)$$

である。

(3) 擴張された演算子算法の基礎は、さきに第 I 篇に於て説明したる演算子算法と、 λ -平面上の複素積分とである。

(4) Laplace 變換法の特徴の一つは、Laplace-Mellin の条件の下に、微分演算子 $D \left(\equiv \frac{d}{dt} \right)$ の代数化、即ち

$$f(D) L_c(t, \lambda) \equiv L_c(t, \lambda) f(\lambda) \cdot$$

にある。

(5) 變換子

$$\mathfrak{L}_0(t, \lambda) \equiv \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathfrak{L}_0} \frac{e^{(t-a)\lambda}}{\lambda} \cdot d\lambda$$

及び

$$\mathfrak{L}_a(t, \lambda) \equiv \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathfrak{L}_a} \frac{e^{(t-a)\lambda}}{\lambda} \cdot d\lambda$$

を導入すれば

$$f(D) \mathfrak{L}_0(t, \lambda) \equiv \mathfrak{L}_0(t, \lambda) f(\lambda) \cdot,$$

$$\left(\text{但し、} f(D) \cdot \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n D^n \cdot \text{とする} \right)$$

及び

$$\mathfrak{L}_a(t, \lambda) \equiv e^{a(t-a)} D(D+\alpha)^{-1} \mathfrak{L}_0(t, \lambda) C \left(\frac{\lambda+\alpha}{\lambda} \right) \cdot$$

なる関係により、漸近展開の演算子法的取扱ひが極めて明瞭に且つ一元的となり、從來の説明に於て見受けられた不徹底及び誤謬は一掃されるのである。

(6) 最後に、演算子法の擴張に役立つ方法は Laplace 變換法以外には無いことを説明し、以て Laplace 變換法の特異性を立證した。

文 献

- (14) Whittaker and Watson: Modern Analysis, 244 (1927).
寺澤寛一: 數學概論, 108 (昭 6).
- (15) 竹内端三: 函數論, 下巻 367 (昭 3).
- (16) K. W. Wagner: Operatorenrechnung, 266 (1940).
- (17) 櫻井時夫: 電評., 30, 507 (昭 17).
- (18) 寺澤寛一: 數學概論, 546 (昭 6).
- (19) J. Edwards: A Treatise on the Integral Calculus, Vol. II, 213 (1922).
- (20) Whittaker and Watson: Modern Analysis, 252 (1927).
- (21) 竹内端三: 函數論, 上巻 243 (昭 2).
- (22) 寺澤寛一: 數學概論, 175 (昭 6).

附 録 (I)

補助定理 (i) の證明:

假定により、

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) \int_b^{\infty} e^{-\lambda t} F(t) dt \\ &\equiv \varphi(\lambda) \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ e^{-\lambda t} H(t) + \lambda \int_b^t e^{-\lambda t} H(t) dt \right\} \\ &\equiv \lambda \varphi(\lambda) h(\lambda), \quad \left(h(\lambda) \equiv \int_b^{\infty} e^{-\lambda t} H(t) dt \right) \\ &\equiv f(\lambda). \end{aligned}$$

従つて Mellin の變換定理により、

$$I \left(\begin{matrix} t \\ b \end{matrix} \right) H(t) \equiv \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{e^{t\lambda}}{\varphi(\lambda)} \frac{f(\lambda)}{\lambda} d\lambda, \quad (\mu_0 < c < \mu_1)$$

を得るが、この式の兩邊に $D \equiv \frac{d}{dt}$ を作用せしめれば、左邊よりは第 I 篇の (VI. 10) 式及び (II. 34) 式を用ひて

$$\begin{aligned} D I \left(\begin{matrix} t \\ b \end{matrix} \right) H(t) &\equiv I \left(\begin{matrix} t \\ b \end{matrix} \right) p \left(\begin{matrix} t \\ b \end{matrix} \right) H(t) \\ &\equiv I \left(\begin{matrix} t \\ b \end{matrix} \right) F(t) \end{aligned}$$

が得られ、又右邊よりは、条件 (i. c) を考慮して

$$\begin{aligned} D \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{e^{t\lambda}}{\varphi(\lambda)} \frac{f(\lambda)}{\lambda} d\lambda \\ &\equiv \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{e^{t\lambda}}{\varphi(\lambda)} f(\lambda) d\lambda, \quad (\mu_0 < c < \mu_1) \end{aligned}$$

が求められる故、

$$I \left(\begin{matrix} t \\ b \end{matrix} \right) F(t) \equiv \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{e^{t\lambda}}{\varphi(\lambda)} f(\lambda) d\lambda, \quad (\mu_0 < c < \mu_1)$$

となるのである。

補助定理 (ii) の證明:

假定により、Mellin の變換定理を考慮すれば、

$$I \left(\begin{matrix} t \\ b \end{matrix} \right) H(t) \equiv \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{e^{t\lambda}}{\varphi(\lambda)} \frac{f(\lambda)}{\lambda} d\lambda, \quad (\mu_0 < c < \mu_1),$$

$$\frac{f(\lambda)}{\lambda} \equiv \varphi(\lambda) \int_b^{\infty} e^{-\lambda t} H(t) dt, \quad (\mu_0 \leq R_c(\lambda) \leq \mu_1),$$

$$H(t) \equiv \int_b^t F(t) dt$$

なる $H(t)$ の存在することがわかる。よつて部分積分により、

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) \int_b^{\infty} e^{-\lambda t} F(t) dt &\equiv \lambda \varphi(\lambda) \int_b^{\infty} e^{-\lambda t} H(t) dt \\ &\equiv f(\lambda) \end{aligned}$$

が導かれるのである。

附 録 (II)

$$\begin{aligned} D_x e^{t D x^2} I \left(\begin{matrix} x \\ 0 \end{matrix} \right) &\equiv \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{e^{x\lambda}}{\lambda} \lambda e^{t\lambda^2} d\lambda \\ &\equiv \frac{1}{2\pi j} e^{-\frac{1}{4t} x^2} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{t\left(\lambda + \frac{x}{2t}\right)^2} d\lambda, \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} c > 0, t > 0, \\ -\infty < x < \infty \end{array} \right)$$

であるが、こゝに於て

$$\sqrt{t} \left(\lambda + \frac{x}{2t} \right) = j\mu$$

とおけば

$$D_x \varepsilon^{tD^2} I \left(\begin{array}{l} x \\ 0 \end{array} \right) \equiv \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{t}} \varepsilon^{-\frac{1}{4t}x^2} \int_{-\infty-jy}^{\infty-jy} \varepsilon^{-\mu^2} d\mu$$

となる。こゝに

$$y \equiv \sqrt{\frac{1}{4t}} x + c\sqrt{t}$$

である。然るに

$$\begin{aligned} \int_{-\infty-jy}^{\infty-jy} \varepsilon^{-\mu^2} d\mu &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^{-\mu^2} d\mu \\ &+ \int_{\infty}^{\infty-jy} \varepsilon^{-\mu^2} d\mu + \int_{-\infty-jy}^{-\infty} \varepsilon^{-\mu^2} d\mu \end{aligned}$$

であるが、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^{-\mu^2} d\mu &\equiv \sqrt{\pi}, \\ \int_{\infty}^{\infty-jy} \varepsilon^{-\mu^2} d\mu &\equiv 0, \\ \int_{-\infty-jy}^{-\infty} \varepsilon^{-\mu^2} d\mu &\equiv 0 \end{aligned}$$

であるから、

$$D_x \varepsilon^{tD^2} I \left(\begin{array}{l} x \\ 0 \end{array} \right) \equiv \sqrt{\frac{1}{4\pi t}} \varepsilon^{-\frac{1}{4t}x^2}, \quad \left(\begin{array}{l} t > 0, \\ -\infty < x < \infty \end{array} \right)$$

が得られるのである。

附 録 (III)

本文の (III. 14) 式により、

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-aD^2} \varepsilon^{tD^2} F(t) &\equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^{-(u^2+v^2)} \\ &\cdot F(t+2\sqrt{\alpha}(u+jv)) du dv \end{aligned}$$

であるが、こゝで

$$\begin{aligned} u &= r \cos \theta, \\ v &= r \sin \theta \end{aligned}$$

とおけば

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-aD^2} \varepsilon^{tD^2} F(t) &\equiv \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \varepsilon^{-r^2} r dr \\ &\cdot \int_{-\pi}^{\pi} F(t+2\sqrt{\alpha} r \varepsilon^{j\theta}) d\theta \end{aligned}$$

となる。然るに $F(t+2\sqrt{\alpha} r \varepsilon^{j\theta})$ は θ に關し 2π を周期とする周期函数なる故、

$$\begin{aligned} F(t+2\sqrt{\alpha} r \varepsilon^{j\theta}) &\equiv a_0 + a_1 \cos \theta + a_2 \cos 2\theta + \dots \\ &+ b_1 \sin \theta + b_2 \sin 2\theta + \dots \end{aligned}$$

の如く Fourier 級數に展開されるであらう。而して又上式に於て $r\sqrt{\alpha}$ を充分小なるものとして冪級數展開を行へば、

$$\begin{aligned} F(t+2\sqrt{\alpha} r \varepsilon^{j\theta}) &\equiv F(t) + 2\sqrt{\alpha} r \varepsilon^{j\theta} F'(t) \\ &+ \frac{(2\sqrt{\alpha} r)^2 \varepsilon^{2j\theta}}{2!} F''(t) + \dots \end{aligned}$$

となる。従つて一致の定理⁽²¹⁾により

$$a_0 \equiv F(t)$$

である。故に

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-aD^2} \varepsilon^{tD^2} F(t) &\equiv \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \varepsilon^{-r^2} r dr \int_{-\pi}^{\pi} a_0 d\theta \\ &\equiv F(t), \end{aligned}$$

即ち

$$\varepsilon^{-aD^2} \varepsilon^{tD^2} \cdot \equiv 1 \cdot$$

である。全く同様にして

$$\varepsilon^{tD^2} \varepsilon^{-aD^2} \cdot \equiv 1 \cdot$$

なることを證明し得る。

附 録 (IV)

$$\begin{aligned} (p^2-2)^{-1} 4t^2 \varepsilon^{t^2} \\ \equiv \varepsilon^{t^2} - \sqrt{2} a \varepsilon^{t^2} \sinh \sqrt{2}(t-a) \\ - \varepsilon^{a^2} \cosh \sqrt{2}(t-a) \end{aligned}$$

の計算:

$$\begin{aligned} (p^2-2)^{-1} 4t^2 \varepsilon^{t^2} \\ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{p-\sqrt{2}} - \frac{1}{p+\sqrt{2}} \right) t D \varepsilon^{t^2} \\ \text{であるが、此の内、} \\ (p-\sqrt{2})^{-1} t D \varepsilon^{t^2} \equiv \varepsilon^{\sqrt{2}t} \int_a^t \varepsilon^{-\sqrt{2}t} t D \varepsilon^{t^2} dt \\ \equiv \varepsilon^{\sqrt{2}t} \left\{ \left| \varepsilon^{-\sqrt{2}t} t \varepsilon^{t^2} \right|_a^t \right. \\ \left. - \int_a^t \varepsilon^{-\sqrt{2}t} (1-\sqrt{2}t) \varepsilon^{t^2} dt \right\} \\ \equiv t \varepsilon^{t^2} - \varepsilon^{\sqrt{2}(t-a)} a \varepsilon^{a^2} \\ - \varepsilon^{\sqrt{2}t} \left\{ \int_a^t \varepsilon^{\sqrt{2}t+t^2} dt \right. \\ \left. - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_a^t \varepsilon^{-\sqrt{2}t} D \varepsilon^{t^2} dt \right\} \\ \equiv t \varepsilon^{t^2} - a \varepsilon^{a^2} \varepsilon^{\sqrt{2}(t-a)} - \varepsilon^{\sqrt{2}t} \left\{ \int_a^t \varepsilon^{-\sqrt{2}t+t^2} dt \right. \\ \left. - \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left| \varepsilon^{-\sqrt{2}t+t^2} \right|_a^t \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{2} \int_a^t \varepsilon^{-\sqrt{2}t+t^2} dt \right] \right\} \\ \equiv t \varepsilon^{t^2} - a \varepsilon^{a^2} \varepsilon^{\sqrt{2}(t-a)} \\ + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varepsilon^{t^2} - \varepsilon^{a^2} \varepsilon^{\sqrt{2}(t-a)} \right) \end{aligned}$$

であり、又全く同様にして

$$\begin{aligned} (p+\sqrt{2})^{-1} t D \varepsilon^{t^2} &\equiv t \varepsilon^{t^2} - a \varepsilon^{a^2} \varepsilon^{-\sqrt{2}(t-a)} \\ &- \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varepsilon^{t^2} - \varepsilon^{a^2} \varepsilon^{-\sqrt{2}(t-a)} \right) \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} (p^2-2)^{-1} 4t^2 \varepsilon^{t^2} &\equiv \varepsilon^{t^2} - \sqrt{2} a \varepsilon^{a^2} \sinh \sqrt{2}(t-a) \\ &- \varepsilon^{a^2} \cosh \sqrt{2}(t-a) \end{aligned}$$

が得られるのである。

附 録 (V)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \cdot \equiv \varepsilon^{t \frac{\partial^2}{\partial x^2}} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon^{-t \frac{\partial^2}{\partial x^2}}.$$

の証明:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon^{-t \frac{\partial^2}{\partial x^2}} y(x, t) \\ & \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^{-u^2} y(x + 2j\sqrt{t}u, t) du \\ & \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^{-u^2} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial v} y(x + 2j\sqrt{t}u, v) \right]_{v=t} \right. \\ & \quad \left. + j \frac{u}{\sqrt{t}} \left[\frac{\partial}{\partial w} y(w, t) \right]_{w=x+2j\sqrt{t}u} \right\} du \end{aligned}$$

であるが、

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^{-u^2} \frac{j u}{\sqrt{t}} \left[\frac{\partial}{\partial w} y(w, t) \right]_{w=x+2j\sqrt{t}u} du \\ & \equiv \frac{j}{2\sqrt{t}} \left\{ - \left[\varepsilon^{-u^2} \left[\frac{\partial}{\partial w} y(w, t) \right]_{w=x+2j\sqrt{t}u} \right]_{-\infty}^{\infty} \right. \\ & \quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^{-u^2} \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{\partial}{\partial w} y(w, t) \right]_{w=x+2j\sqrt{t}u} du \right\} \\ & \equiv - \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^{-u^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial w^2} y(w, t) \right]_{w=x+2j\sqrt{t}u} du \end{aligned}$$

であるから、附録 (III) に於ける計算と同様にして

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{t \frac{\partial^2}{\partial x^2}} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon^{-t \frac{\partial^2}{\partial x^2}} y(x, t) \\ & \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \varepsilon^{t \frac{\partial^2}{\partial x^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial w^2} \right) \cdot \right. \\ & \quad \left. \cdot y(w, t) \right]_{w=x+2j\sqrt{t}u} \varepsilon^{-u^2} du \\ & \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^{-v^2} dv \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial w^2} \right) \cdot \right. \\ & \quad \left. \cdot y(w, t) \right]_{x+2j\sqrt{t}(v+ju)} \varepsilon^{-u^2} du \\ & \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \varepsilon^{-r^2} r dr \int_{-\pi}^{\pi} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial w^2} \right) \cdot \right. \\ & \quad \left. \cdot y(w, t) \right]_{w=x+2j\sqrt{t}rc^{j\theta}} d\theta \\ & \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) y(x, t) \end{aligned}$$

なる関係が得られるのである。

附 録 (VI)

公 式 集 (その II)

断りなき限り、 $p^{-1} \cdot \equiv \int_0^t \cdot dt$, ($t > 0$) とする。

- (1). $f(q + \alpha) \cdot \equiv \varepsilon^{-\alpha t} f(q) \varepsilon^{\alpha t}$, ($-\infty < t < \infty$)
但し、 q は D 又は p ;
又 $f(x)$ は x その有理函数とは限らない。

(2). $\varepsilon^{\alpha D} \cdot \equiv C \left(\frac{t + \alpha}{t} \right) \cdot$
 $\simeq \left(1 + \frac{\alpha}{1!} D + \frac{\alpha^2}{2!} D^2 + \dots \right) \cdot$,
(α ; 實常數)
($-\infty < t < \infty$).

(3). $\varepsilon^{\alpha D^2} \cdot \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^{-\tau^2} C \left(\frac{t + 2\sqrt{\alpha}\tau}{t} \right) \cdot d\tau$,
(α : 實常數),

$D \varepsilon^{\alpha D^2} I \left(\frac{t}{0} \right) \equiv \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha}} \varepsilon^{-\frac{t^2}{4\alpha}}$,
($\alpha > 0$,
 $-\infty < t < \infty$).

(4). $p^s \cdot 1 \equiv \frac{1}{\Gamma(1-s)} t^{-s}$, ($s < 1$).

$\sqrt{p} \cdot 1 \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$, $\frac{1}{\sqrt{p}} \cdot 1 \equiv \frac{1}{2} \sqrt{\frac{t}{\pi}}$.

(5). $\frac{\sqrt{p}}{p^n} 1 \cdot \equiv \frac{n!}{(2n)!} \frac{(4t)^n}{\sqrt{\pi t}}$, ($n = 0, 1, 2, \dots$).

(6). $\frac{p}{\sqrt{p+\alpha}} \cdot 1 \equiv \frac{\varepsilon^{-\alpha t}}{\sqrt{\pi t}}$.

(7). $\sqrt{p} \varepsilon^{-2\sqrt{\alpha} p} \cdot 1 \equiv \frac{\varepsilon^{-\frac{\alpha}{t}}}{\sqrt{\pi t}}$

(8). $\varepsilon^{-2\alpha\sqrt{p}} \cdot 1 \equiv 1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{t}} \right)$,

$\operatorname{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \varepsilon^{-x^2} dx$.

(9). $\sqrt{p+\alpha} \cdot 1 \equiv \frac{\varepsilon^{-\alpha t}}{\sqrt{\pi t}} + \alpha \int_0^t \frac{\varepsilon^{+\alpha t}}{\sqrt{\pi t}} dt$.

(10). $\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p+\alpha}} \cdot 1 \equiv \varepsilon^{\alpha t} \left(1 - \sqrt{\alpha} \int_0^t \frac{\varepsilon^{-\alpha t}}{\sqrt{\pi t}} dt \right)$.

(11). $\frac{p}{\sqrt{p^2+\beta^2}} \cdot 1 \equiv J_0(\beta t)$,

$\frac{p}{\sqrt{p^2-\beta^2}} \cdot 1 \equiv I_0(\beta t)$.

(12). $\frac{p}{\sqrt{(p+\alpha)^2+\beta^2}} \cdot 1 \equiv \varepsilon^{-\alpha t} J_0(\beta t)$,

$\frac{p}{\sqrt{(p+\alpha)^2-\beta^2}} \cdot 1 \equiv \varepsilon^{-\alpha t} I_0(\beta t)$.

(13). $\sqrt{\frac{p-\alpha}{p+\alpha}} \cdot 1 \equiv I_0(\alpha t) - \alpha \int_0^t I_0(\alpha t) dt$.

(14). $\sqrt{\frac{p+\beta}{p+\alpha}} \cdot 1 \equiv \varepsilon^{-\frac{\alpha+\beta}{2} t} I_0 \left(\frac{\alpha-\beta}{2} t \right)$
 $+ \beta \int_0^t \varepsilon^{-\frac{\alpha+\beta}{2} t} I_0 \left(\frac{\alpha-\beta}{2} t \right) dt$.

(15). $\left(1 - \frac{\alpha}{p} \right) \cdot 1 \equiv \frac{1}{n!} L_n(\alpha t)$.

但し、

$$\begin{aligned} L_n(x) & \equiv \sum_{k=0}^n (-)^k \binom{n}{k} \frac{n!}{k!} x^k \\ & \equiv \varepsilon^x \left(\frac{d}{dx} \right)^n (x^n \varepsilon^{-x}) \end{aligned}$$

は Laguerre の多項式⁽²²⁾である。

(16). $\left(p \log \left(1 + \frac{1}{p} \right) \right) \cdot 1 \equiv \frac{1 - \varepsilon^{-t}}{t}$.

(17). $\varepsilon^{-\frac{\alpha}{p}} \cdot 1 \equiv J_0(2\sqrt{\alpha t})$,

$\varepsilon^{\frac{\alpha}{p}} \cdot 1 \equiv I_0(2\sqrt{\alpha t})$.

$$(18). \left(\cos \frac{\alpha}{p}\right) \cdot 1 \equiv \text{ber}(2\sqrt{\alpha t}).$$

$$(19). \left(\sin \frac{\alpha}{p}\right) \cdot 1 \equiv \text{bei}(2\sqrt{\alpha t}).$$

$$(20). \left(p \tan^{-1} \frac{\alpha}{p}\right) \cdot 1 \equiv \left(p \cot^{-1} \frac{p}{\alpha}\right) \cdot 1 \\ \equiv \left(\frac{p}{2} \tan^{-1} \frac{2\alpha p}{p^2 - \alpha^2}\right) \cdot 1 \\ \equiv \frac{\sin \alpha t}{t}.$$

$$(21). \left(\tan^{-1} \frac{\alpha}{p}\right) \cdot 1 \equiv \left(\cot^{-1} \frac{p}{\alpha}\right) \cdot 1 \\ \equiv \left(\frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2\alpha p}{p^2 - \alpha^2}\right) \cdot 1 \\ \equiv \int_0^t \frac{\sin \alpha t}{t} dt \\ \equiv \text{Si}(\alpha t).$$

$$(22). \left(\frac{p}{4} \log \frac{p^2 + (\alpha + \beta)^2}{p^2 + (\alpha - \beta)^2}\right) \cdot 1 \equiv \frac{\sin \alpha t \sin \beta t}{t}$$

$$(23). \left(\frac{p}{4} \log \left(1 + \frac{4\alpha^2}{p^2}\right)\right) \cdot 1 \equiv \frac{\sin^2 \alpha t}{t}.$$

$$(24). \left(\frac{p}{2} \tan^{-1} \frac{2\alpha p}{p^2 + \beta^2 - \alpha^2}\right) \cdot 1 \equiv \frac{\sin \alpha t \cos \beta t}{t}$$

$$(25). \left(\log \frac{1}{\sqrt{p^2 + \alpha^2}}\right) \cdot 1 \\ \equiv r + \log t + 2 \int_0^t \frac{\sin^2 \alpha t / 2}{t} dt \\ \equiv \int_{-\infty}^r \frac{\cos \alpha t}{t} dt \\ \equiv \text{Ci}(\alpha t).$$

$$(26). \left(\sqrt{p} \varepsilon^{-\frac{\alpha^2}{4p}}\right) \cdot 1 \equiv \frac{\cos \alpha \sqrt{t}}{\sqrt{\pi t}},$$

$$\left(\sqrt{p} \varepsilon^{\frac{\alpha^2}{4p}}\right) \cdot 1 \equiv \frac{\cosh \alpha \sqrt{t}}{\sqrt{\pi t}}.$$

$$(27). \left(\frac{1}{\sqrt{p}} \varepsilon^{-\frac{\alpha^2}{4p}}\right) \cdot 1 \equiv \frac{2}{\alpha} \frac{\sin \alpha \sqrt{t}}{\sqrt{\pi}},$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{p}} \varepsilon^{\frac{\alpha^2}{4p}}\right) \cdot 1 \equiv \frac{2}{\alpha} \frac{\sinh \alpha \sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}.$$

$$(28). \left(\pi \coth \pi p - \frac{1}{p}\right) \cdot 1 \equiv 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n}, \\ (-\infty < t < \infty) \\ \equiv \pi - t, \quad (0 < t < 2\pi).$$

$$(29). \left(\frac{\pi}{p} \coth \pi p - \frac{1}{p^2}\right) \cdot 1 \\ \equiv \frac{\pi^2}{3} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n^2}, \quad (-\infty < t < \infty) \\ \equiv \pi t - \frac{1}{2} t^2, \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

$$(30). \left(\tanh \frac{\pi}{2} p\right) \cdot 1 \equiv \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1}, \\ (-\infty < t < \infty) \\ \equiv \begin{cases} +1, & (0 < t < \pi), \\ -1, & (\pi < t < 2\pi). \end{cases}$$

$$(31). \left(\frac{p}{p^2+1} \coth \frac{\pi}{2} p\right) \cdot 1 \\ \equiv \frac{2}{\pi} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{4n^2-1} \right\}, \quad (-\infty < t < \infty)$$

$$\equiv \begin{cases} \sin t, & (0 \leq t \leq \pi), \\ -\sin t, & (\pi \leq t \leq 2\pi). \end{cases}$$

$$(32). \left\{ \frac{p}{p^2 - \alpha^2} \left(p \coth \pi p \tanh \alpha \pi - 1 \right) \right\} \cdot 1 \\ \equiv \frac{2\alpha}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{\left(n + \frac{1}{2} \right)^2 + \alpha^2}, \quad (-\infty < t < \infty) \\ \equiv \frac{\sinh \alpha (\pi - t)}{\cosh \alpha \pi}, \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

$$(33). \left\{ \frac{p}{p^2 + \alpha^2} \left(p \coth \pi p - \alpha \cot \alpha \pi \right) \right\} \cdot 1 \\ \equiv \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + \alpha^2} \sin t, \quad (-\infty < t < \infty), \\ \equiv \frac{\sin \alpha (\pi - t)}{\sin \alpha \pi}, \quad \begin{matrix} 0 < t < 2\pi, \\ \alpha \neq 1, 2, 3, \dots \end{matrix}$$

$$(34). \frac{p}{\sqrt{p^2 + \beta^2}} \left(\frac{\sqrt{p^2 + \beta^2} - p}{\beta} \right) \cdot 1 \equiv J_{\nu}(\beta t), \\ \frac{p}{\sqrt{p^2 - \beta^2}} \left(\frac{p - \sqrt{p^2 - \beta^2}}{\beta} \right) \cdot 1 \equiv I_{\nu}(\beta t). \\ (\nu \text{ 整数とは限らぬ。})$$

$$(35). \frac{D}{\sqrt{D^2 + \beta^2}} \varepsilon^{-\alpha \sqrt{D^2 + \beta^2}} \mathbf{I} \left(\begin{matrix} t \\ 0 \end{matrix} \right) \\ \equiv \mathbf{I} \left(\begin{matrix} t \\ \alpha \end{matrix} \right) J_0(\beta \sqrt{t^2 - \alpha^2}), \\ \frac{D}{\sqrt{D^2 - \beta^2}} \varepsilon^{-\alpha \sqrt{D^2 - \beta^2}} \mathbf{I} \left(\begin{matrix} t \\ 0 \end{matrix} \right) \\ \equiv \mathbf{I} \left(\begin{matrix} t \\ \alpha \end{matrix} \right) I_0(\beta \sqrt{t^2 - \alpha^2}).$$

$$(36). \varepsilon^{-\alpha \sqrt{D^2 + \beta^2}} \mathbf{I} \left(\begin{matrix} t \\ 0 \end{matrix} \right) \\ \equiv \mathbf{I} \left(\begin{matrix} t \\ \alpha \end{matrix} \right) \left\{ 1 - \alpha \beta \int_a^t \frac{J_1(\beta \sqrt{t^2 - \alpha^2})}{\sqrt{t^2 - \alpha^2}} dt \right\}, \\ \varepsilon^{\alpha \sqrt{D^2 - \beta^2}} \mathbf{I} \left(\begin{matrix} t \\ 0 \end{matrix} \right) \\ \equiv \mathbf{I} \left(\begin{matrix} t \\ \alpha \end{matrix} \right) \left\{ 1 + \alpha \beta \int_a^t \frac{I_1(\beta \sqrt{t^2 - \alpha^2})}{\sqrt{t^2 - \alpha^2}} dt \right\}.$$

$$(37). f_1(D) \mathbf{I} \left(\begin{matrix} t \\ t_0 \end{matrix} \right) \equiv \mathbf{I} \left(\begin{matrix} t \\ t_1 \end{matrix} \right) F_1(t), \\ f_2(D) \mathbf{I} \left(\begin{matrix} t \\ t_0 \end{matrix} \right) \equiv \mathbf{I} \left(\begin{matrix} t \\ t_2 \end{matrix} \right) F_2(t)$$

ならば

$$D^{-1} f_1(D) f_2(D) \mathbf{I} \left(\begin{matrix} t \\ 0 \end{matrix} \right) \\ \equiv f_1(D) \mathbf{I} \left(\begin{matrix} t \\ t_2 \end{matrix} \right) F_2(t) \\ \equiv f_2(D) \mathbf{I} \left(\begin{matrix} t \\ t_1 \end{matrix} \right) F_1(t) \\ \equiv \mathbf{I} \left(\begin{matrix} t \\ t_1 + t_2 - t_0 \end{matrix} \right) \\ \cdot \int_{t_1}^{t - (t_2 - t_0)} F_1(\tau) F_2(t - \tau + t_0) d\tau.$$

特に、 $t_0 = t_1 = t_2$ ならば

$$p \left(\begin{matrix} t \\ t_0 \end{matrix} \right)^{-1} f_1 \left\{ p \left(\begin{matrix} t \\ t_0 \end{matrix} \right) \right\} f_2 \left\{ p \left(\begin{matrix} t \\ t_0 \end{matrix} \right) \right\} \cdot 1 \\ \equiv \int_{t_0}^t F_1(\tau) F_2(t - \tau + t_0) d\tau \\ \equiv \int_{t_0}^t F_1(t - \tau + t_0) F_2(\tau) d\tau.$$

— 耐 熱 電 池 —

(三菱特許 第 158763 號)

電池の發電作用は、陰極が電解液に溶解する事に依り起るものであるから、不使用時と雖も、陰極は自然に溶解して消耗する傾向がある。而して此の傾向は、高温に於て特に甚だしく、長期保存の不可能なるは此の故である。

本發明は、此の陰極の溶解を防止する爲に、「ゼラチン」或は膠の如き蛋白質系親水「コロイド」物質を電解液に添加する事の特徴とするもので、「ゼラチン」の防蝕効果の理は審でないが、親水「コロイド」が、「イオン」的に金屬面の一部に吸着せられ、溶解を防止するものゝ様である。

尙「ゼラチン」に、重「クロム」酒鹽を添加すれば、其の効果が一層顯著なる事實が、實驗により明かにされた。蓋し「ゼラチン」に重「クロム」酒加里を加へて、日光に曝せば、水に不溶性のものとなる現象がある故なるべし。

(中 野)

— 吸 濕 乾 電 池 —

(三菱特許 第 156004 號)

本發明は、電解液に、鹽化「カルシウム」、鹽化「マグネシウム」、鹽化亞鉛等の如き吸濕性鹽類を、一種又は二種以上混合含有せしめ、保存中は、粘着性「テープ」により、乾電池外圍の氣孔を密閉して乾燥状態に保ち、活動性物質を不反應状態とし、使用時には、粘着性「テープ」を剝取り、空氣中の水分を適度に吸収せしめ、再び「テープ」にて密閉し置けば、活動性物質が反應して發電する如くなる事の特徴とするものである。

一般に乾電池と稱するも、從來の乾電池は、電解液を多孔性物質に吸収保持せしめたもので、唯電解

液が流出しないといふだけで、全く乾燥状態に在るものではない。従て、乾電池内の活動性物質は活動性の儘放置されるから、必ず反應して所謂自己消耗を行ひ、資材の損耗を少しとしない。斯る不利益の救助策として、注液式或は注水式の提案があるが、注液式は適當に調合せられた電解液を常備し置く必要があるし、注水式は、純水を保存すべき不便ありて、孰れも實用上尙缺點がある。

然るに本發明の吸濕乾電池は、保存中は活物質が凡て乾燥状態に在りて反應性無く、使用時に於てのみ空氣中より水分を吸収して發電するから、長期保存に耐へ、保存後と雖も、放電能率は不變であり、特種の電解液又は水を必要とせず、而も時と場所とを選ばずして扶活せしめ得る効果があり、斯種乾電池として理想的のものである。

(中 野)

乾 電 池 電 解 液 吸 收 体

(三菱特許 第 158736 號)

電池の電解液に、濃淡の差があると、極板が自己放電を行ひ、自然消耗して電池の壽命を損するは周知の事である。乾電池の電解液は、澱粉を糊化したものに、吸収保持せしめたものが多く、其の糊化方法は、電解液に澱粉を加へて、電池内に注入した後加熱するか、又は電解液に鹽化亞鉛の如き糊化劑を加へて、室温に放置して、糊化させるのが普通である。その何れの方法によるも、糊化する迄には相當の時間を要し、長時間に於いては、比重大なる澱粉が沈下するから、下層では澱粉の濃度が大となり且電解液にも、濃度の差を生じ、所謂濃淡の理に因る自己放電をなす缺點がある。

本發明は、電解液吸収体として、豫め糊化せざる澱粉と、糊化せる澱粉との混合物を紙片に塗布し、乾燥した後所要寸法に裁斷し、之に電解液を吸収せしめたものを使用する事の特徴とし、澱粉粒子の移動が無く、組立に際し、均質確實なる製品を簡単に得らるゝ利益がある。

(中 野)

第 19 卷 第 12 號 内 容 豫 定

内鐵型變壓器の渦流損に關する研究
極數變換電動機による速度制御の實驗に就て
實測溫度上昇曲線による熱時常數の推定法
波型金屬空盒及び其の工作法に就て
三菱積層乾電池

木 村 久 男
織 本 照 雄
片 岡 高 示
山 田 三 郎
鎌 居 利 惣

明治時代の誘導電動機

我が國に於ける誘導電動機は明治30年頃より、漸次製作を開始しつゝあつた。最初に造り始めた誘導電動機は技術資料、製作圖面等全てを歐米先進國に仰いでゐたのであつて、當時の人々は勿論其の工事に當つた先輩達も、誘導電動機が、書籍や、雜誌等では廻ると書いてあつても回轉子に電流を通さずに廻ると云ふ事は不思議千萬なる事として信ずる事は出来なかつた。

工場で出来上つた誘導電動機に始めてスイッチを入れて遅い乍ら廻り始めた時には、人々は手品の如く珍らしがつた。此處に其の當時の籠型誘導電動機を略記する。

空隙考察の誤り

當時空隙は15ミル以下を設計して、空隙が小さければ小さいだけ良いと考へてゐた。僅かな空隙ですれ合ふ様に造る事が、技術の優秀と考へ、その様にせんが爲非常な苦勞をした。軸受に赤ペンキを塗り付けスケップで當る處を削り、何回も同じ事を繰り返した。何の程度空隙が軸受にあれば適當であるか解らず、隙間が大きければ空隙がすれて火花が生じ、軸受の隙間が少なければ油が廻らない。其の様な問題や、裏金の油道を如何なる形にすれば良いか等の問題に就いては霧中模糊であつた。空隙が小さければ回轉力に不都合を生ずると氣付いたのは、ずつと後程で大正10年あつた。

鐵心の造り方

ノッチングマシンが當時非常に悪かつたので鐵心溝は非常に不揃で、鋸で揃へる事に時間を費した。又スパイダーとの關係等も随分粗惡であつた。固定子の内形をも必ず一度は鋸作業が必要であつた。鐵心の一番端に厚い板を入れる事を知らなかつた爲、鐵心にゆるみを生じ、外國製品と比較すると日本製はギャーギャーと鳴り、外國製はゴーゴーと鳴つてゐたのである。

溝の數

固定子と回轉子との溝の數はどちらが多い方が良いとか、數比を如何程にすれば良いか等の問題に確答を得る事が出来なかつた。始動に回轉力の足りないものや、同期速度よりずっと低い處で廻つてゐるもの、中途の速度で回轉力が足りなくなる捲上機用製品、或は遠心ポンプが途中で止まつて困つた例等數へ切れなかつた。

現在の設計に於ては溝の數が相數の倍になつてゐないものを使つてゐるが當時は恐ろしくて考へも及ばなかつた

籠型の構造

棒と輪との組合せに就いては失敗が跡を斷たなかつた。一つ一つを四頭小ネジ二三本使かつて取付けを行つたり銅や眞鍮の紙でかしまたり、ハンダと錫とを併用したり行つた。或る時は棒の端を縦に溝を割り込んで、之れに薄板の輪に挿し込む事もした。それでも駄目だと云ふので機械的に銅棒を態々造つて貰つたり、種々工夫を凝らした。

滑動環と刷子

短絡装置と刷子揚装置に就いては絶えず問題があり、外國品を眞似ても上手に行かなかつた。工作上の失患殊に鑄物性能が不充分であり、設計者の圖面通り、複雑なカムを機械削りする方法を知らなかつたに原因があつた。

制御器

捲上機用等には鑄物の抵抗片を始めより使用してゐたが、運搬中にかげ落ちる事が多く、之れも鑄物が幼稚であつたに因し、制御器はフィガーやドラムが火花の爲、傷む事が多く、絶えず手入するのが當然と考へられてゐたのである。(N)

最初に當つて

忠誠勇武なる皇軍が大東亞完遂の爲に目覺しい戦果を到る處が擧げる。

然かも少い兵力で此の様な戦果は何にも一朝一夕に出来上つたものではない。御稜威の元皇軍の不斷の努力、練磨によるものである事は勿論であるが各人が日本の正しい歴史と、傳統とを自覺し、日清、日露の戦役に小さな少い兵力、兵器、艦船を以て、彼の大敵を葬り去る事が出来たと云ふ必勝の信念が與つて力があつた事を忘れてはならない。

吾々電機製造技術者も、我國に於ける機器發達の技術史を知つて、今後の方針を樹てする必要はなからうか、

卷末の一駒を利用して、其の機器別歴史の一端を述べる。

編輯室

武士道とは死ぬこととみつけたり。(葉隠)

ブーゲンビル島、さてはギルバート諸島と相次いで擧げられた赫々の戦果、日本人たるもの一人として快哉を叫ばぬものがあらうか。併しこの戦果の陰に何人かの勇士が黙々として死地に赴きつゝあることを思ふ時、銃後の我々は如何なる覺悟で日々を過すべきか。

一日一日が決戦の連続であると云ふ。南方戦線は將に文字通りの死闘血闘の連続である。この時に當り銃後で平和に暮して居る我々の責務は何か。

死ぬこととみつけたり。將に然り。銃後に於て我々は職場で死のう。

科學の戦士として我々の仕事は直接第一線につながつて居る。我々の一歩躍進は第一線兵士の突撃を意味する。

我々には輝かしい戦果はない。唯質と量とを以て敵米英科學陣に戦をいどむのみ。皇軍の擧げる戦果は直に我々の戦果だ。責務は重い。突進躍進之あるのみ。

再び12月8日を亦迎へるにあたり、我等の覺悟を新にし一層の努力を此處に誓ふ。

出版物の整理統合が打寄せて來た。併し我々の決意は唯一つ。戦争に彼立つならば欣然國策に殉ぜん。

(Y)

三菱電機株式會社

東京都澁田區丸ノ内二丁目四

編輯兼發行者 中 台 一 男

〔無斷轉載を禁ず〕

發 行 所 神戶市兵庫區和田崎町三丁目
「三菱電機」編輯部

東京都澁田區澁路町二丁目九
配 給 元 日本出版配給株式會社

大阪市東區北久太郎町一丁目一六

昭和18年12月17日 印刷納本

印 刷 者 久 保 專 治

昭和18年12月20日 發 行

大阪市東區北久太郎町一丁目一六

〔本誌代價〕 ㊦ 壹部=付 金貳拾錢

印 刷 所 株式會社 日本寫真工藝社

日本出版文化協會 會員番號 第132506號