



三菱電機

第 19 卷

昭和 18 年 9 月

第 9 號

内 容 目 次

兵器と布ゴム	大久保 貫 一	303 (1)
三菱新型鋼板製高周波電氣爐	田 宮 利 彦	307 (5)
ミシン發達史 (2)	伊 東 璋	309 (7)
Heaviside 演算子法に對する新しい 考察とその電氣回路に於ける應用 (IX)	菅 野 正 雄	317 (15)

三菱電機株式會社

三菱電機

第十九卷

昭和十八年九月

第九號

陸軍管理官検閲済

768.06:623

兵器と布ゴム

世田谷工場 大久保 貫一

内容梗概

兵器として用ひられるゴム布、特に氣球、浮囊舟類に用いられるゴム布の一般ゴム布と異なる特徴及性能に就て概説した。

1 緒言

ゴム布と云ふと、誰もが防水布所謂雨合羽を聯想する。それ程ゴムの防水性と云ふ事は人口に膾炙されてゐるが、ゴムの氣密性と云ふ事に關しては、一般に閑却され勝の様に考へられる。しかも兵器としてのゴム布の價值は、その氣密性が主として取り上げられてゐるのであつて、我々が今着てゐる雨合羽、ゴム引レインコートが、兵器として重要な一部門をなしてゐると云はれると、些か意外な感じがさえるが、氣球、浮囊舟並びに防毒用器材、等は之等ゴム布製の兵器に他ならない。警報下の大空にボツカリ浮揚される阻塞氣球や重砲陣地の觀測所として活躍する偵察氣球の膨大なる氣囊も此ゴム布に他ならない。敵前渡河の舟艇、或は戦車や火砲の如き巨大な重量の兵器を、易々と對岸に搬ぶ輕門橋等も同じゴム布の一種である。然して之等のゴム布は他の防水用ゴム布と異り、特殊の性能を必要とするのであつて、今此處に之等の特徴を略記して、ゴム布に對する認識を改めて頂きたいと思ふ。

2 氣球用ゴム布

氣球のガス囊を形成するゴム布は、之を球皮と稱し強度と氣密性に加へて輕量が要求される。

球皮としての必須條項は

1. 輕くて抗張力の大きな事
2. ガス透過性が小なる事
3. 大氣の影響(日光、濕氣、寒暑に耐へる事
4. 屈撓性に富み空氣の摩擦小なる事

等である。

以上の條項に適合する爲に、その材料たる織布の選擇は特に重要である。

ア 織布

絹布絹絲は纖維が細く(0.01~0.018mm)密に織出さ

れるし輕く(比重1.3)且抗張力が大きく摩擦に耐へ、糸切れ少なく又節も稀である。しかし伸び易く、又空氣中に曝露された場合強度の減退が大きく、且發電性が強い等の欠點の爲、一般には綿布が用ひられてゐるが、資材の關係等から見ても將來は絹布を用ひる可きである。しかしそれには之等の欠點を如何にして改善するかが、先づ第一の問題である。

第1表 絹布

種別	糸数/cm		重量 g/m ²	抗力 kg/m	抗力 重量
	經	緯		平均	
6 匁羽二重	55	43	25	400	16.0
10 匁羽二重	50	40	45	650	14.4
15 匁羽二重	48	38	65	1000	15.4

綿布 特別に球皮用として製造したるもので、嘗ては外國品が用ひられて居たが、現在では國產品が用ひられる。綿絲は出来るだけ長いもの(シー・アイランド産、長さ約40mm太さ0.035~0.04mm埃及綿長さ38~39mm太さ0.02~0.026mm)がよい。絲の撚りが一樣で強さが等齊でなければならぬ。織方も出来るだけ密で、經緯の絲数は同じく又節絲、拔絲なく面の平滑なものたる事を要する。又糊の多いものはよくない、それは布の

第2表 球皮用綿布性能表

重量 g/m ²	糸数/cm		抗張力 kg/m	
	經	緯	經	緯
60	51	50	720	700
80	49	48	850	950
100	47	45	970	1000
110	46	44	1150	1000
140	42	43	1300	1350

重量を増すばかりでなく、糊が布目の穴を塞ぎ、糊の粘着を害し、他方織絲同志の自由を束縛するので、引裂け易く又後日球皮の腐敗を招く怖があるからである。従つて糊抜は充分行ふ事を必要とする。

イ 織布の染色

球皮用織布は紫外線を遮断する爲に着色される。着色しない布は日光に曝露した時、紫外線を透過してゴム膜の老化を促進するのであつて、布の色彩がゴムに及ぼす影響に就ては次の如き結果が發表せられて居る。

ゴムシートを種々の色の織布に包み露天に數ヶ月放置せる後、その抗張力を比較したるものである。

織布の染色		抗張力の比較値
表黄色布	裏黄色布	100%
黄色布	白色布	95
綠色布	綠色布	93
綠色布	白色布	90
白色布	白色布	31.5

又黄色布及綠色布にて包み6ヶ月間露天曝露したゴムシートの、化學分析の結果は次の如くである。

	黄色布に包みたるもの		綠色布に包みたるもの	
	A	B	A	B
ゴム量%	60.0	93.8	60.0	93.8
アセトン抽出量%	4.05	2.95	5.11	3.40
遊離硫黄量%	0.14	0.26	0.25	0.35

以上の結果から見れば、織布に對する染色は黄色或は綠色が最も良いことになる。

ウ/ 球皮の構成

球皮の種類には一重、二重、三重及特別の場合には四重にする時もあるが、概ね斜交貼二重球皮として用ひられる。即ち中間にゴムを介して、一方の織布を長軸に對し經緯の方向45になる様に貼合せたもので、引裂抵抗を増し、伸が小さく、經緯の抗力が均齊となる利點がある。三重球皮の場合は、中間の織布を斜交貼とするのが常である。

一般球皮の構成は次の如くである。

1 重球皮		2 重球皮		3 重球皮	
g/m ²		g/m ²		g/m ²	
着色布	80	裏布	110	裏布	80
ゴム	120	中間ゴム	100	中間ゴム	100
——		表布斜交	80	斜交布	80
200		——		ゴム	30
		290		表布	80
					370

エ 氣密性

球皮の生命はガスに對する不透過性にある。氣體が球皮を透過する原因は次の二つに別けて考へられる。

- 1) ゴムに對する氣體の溶解或は吸着
- 2) ゴムに對する氣體の擴散及透過

(1) の場合に於ける損失は通常非常に小さく、氣密性の悪くなる原因の大部分は(2)に因るものと見て差支へない。氣體の透過はゴム膜の厚さに逆比例する。

第3表

ゴム膜厚%	1.01	0.97	0.79	0.67	0.57	0.47	0.31
比透過率	1.00	1.10	1.36	1.64	2.27	2.72	5.27

其他ガスの種類、溫度、壓力の影響等當然考へなければならぬ。(第4,5表)

第4表

壓力 kg/cm ²	4.17	3.33	2.57	1.72	0.74
比透過率	7.0	5.6	4.0	2.6	1.0

第5表

溫度 °C	25.7	29.	34.	37.	40.
比透過率	1.0	1.25	1.69	1.94	2.31

又ゴムの配合、加硫方法、加硫の程度も氣密性に微妙な關係がある。特にゴムの配合は重大で、球皮の氣密性の良否は球皮ゴムに依つて左右されると云つても敢て過言ではない。従つて球皮ゴムの配合は抗張力よりも水素ガスに對する不透過性が主眼で、配合物もそれに依つて擇ばなければならない。

原料ゴムの種類に依る氣密性の差異は餘り無い様である。(第6表)

第6表

ゴム種別 (厚 1.04%)	ガス漏度 lit/m ² /Hr
スモークシート	0.11
ホワイトクレープ	0.11
ブラウンクレープ	0.11

配合物に依る影響は最も大きく、その量の増減は氣密性に關係がある様であるが種類に依つて極めて不規則であるから一概に斷言は出来ない。(第7,8,9表)

亜鉛華の場合には、填料の増加によつて或る程度迄ガスの漏洩度は減するらしい。

又軟化剤、老化防止剤の配合も氣密性に良い結果を與へるものと考へられるが、實際には餘り好結果を得て居ない。(第10表)

ゴム製品は加硫に依つて始めて眞價を發揮する事は衆知の事であるが、球皮に於ては特に熱加硫が必要である。而して熱加硫は加硫中に於て硫化水素の發生、ゴム或は填料中に吸藏せられて居る水、ガス類の熱に依る放出、或は硫黄、ゴム、促進剤、促進助剤の化學的變化に基く分子間隙の變化等から、加硫前後の氣密性は當然差異が豫想される。(第11表)

第 7 表

配合物 (重量%)	水素ガス漏洩量 lit/m ² /24H
○	10.6
ガスブラック (18.9)	13.3
クレー (28.1)	19.4
ホワイチング (29.2)	26.5
亜鉛華 (60.0)	12.8

第 8 表

配合物 (重量%)	水素ガス漏洩量 lit/m ² /24H
○	17.1
カーボンブラック (28.3)	11.7
クレー (42.4)	11.7
ホワイチング (44.0)	15.3
亜鉛華 (90.0)	14.0

第 9 表

亜鉛華 (重量%)	水素ガス漏洩量 lit/m ² /24H
○	18.5
30.1	16.2
60.3	16.2
90.5	15.3
120.6	14.0

第 10 表

添加物 (添加量)	水素ガス漏洩量 lit/m ² /24H
無し	28.6
モノツクス (1.5%)	17.7
バイガール (〃)	19.5
ソフトナー (5%)	14.2

第 11 表

141°C の加硫時間	水素ガス漏洩量 lit/m ² /24H	
	A	B
○	17.5	10.7
20 分	28.6	14.2
40 分	28.7	14.6

125°C の加硫時間	C	D	E	F
○	6.35	8.0	16.65	16.8
40 分	10.6	13.25	19.4	26.5
75 分	10.8	13.75	21.2	26.4

加硫温度を変更して、夫々の最適点附近のゴムに就て試験した結果、加硫の進行とガスの漏洩量との関係は未だ區々たるものがあり不明である。(第 12 表)

オ 気密性と老化

老化に依る気密性の劣化は透過度の問題ではなく、むしろ微細な龜裂の爲と考へて差支へない。特に球皮の如く極めて薄いゴム布の場合は、顯微鏡的龜裂が気密性に影響を與へるのであつて、此の現象を利用して気密性の測定から老化の程度を考察する事が出来るわけである。(第 13 表)

第 12 表

加硫温度	加硫時間	比漏洩度
160.0	15 分	1.00
155.4	30 //	0.94
148.9	50 //	0.94
143.3	80 //	0.94
137.7	130 //	1.00

カ ゴムの緊張と気密性

ゴムを引張つた場合其の厚さが減少するのみならず、配合剤並にゴムの分子配列の變化から、それに依つて何等かの變化が起る様に考へられるが、實際に極く僅少である。しかし緊張に依るゴム膜の面積増加が、透過度を増す事は事實である。

キ ピンホール

気密布を取扱ふ場合、製作者の頭を悩ますものはピンホールである。ピンホールの發生の原因は、填料中の水分、凝集し易い軟化剤(パラフィン、ステアリン酸等の如きもの)硫黄、溶剤等がその主なるものであるが、以上の原因の中特に溶剤はピンホールと深い関係を有する。即ち沸點の低い純溶剤は急に揮發する際にピンホールを作り易し、又蒸發點の高いものは残り易くこれが加硫温度に依つて急に放出せられてピンホールの原因となるとも考へられる。次に溶剤とガス漏洩量との関係の一例を掲げると次の如くである。

ク 合成ゴムの利用天然ゴムに對して合成ゴムの利用が最近頃に研究されて來たが、未だ加工法に於て幾多の難點があり、完成の域に達して居ない。特に織布と合成ゴムの接着状態を考へた場合、接着糊の研究が先決問題である。合成ゴムが粘着附與剤なくして單に之を溶剤に溶かした場合、天然ゴムに見る如き粘性の無い事は周知の事である。故に何等かの粘性附與剤、或は附與方法

第 13 表

種別	A	B	C
化合硫黄%	1.4	3.0	1.5
遊離硫黄%	0.5	2.8	1.2

水素漏洩量	老化前	17.0	18.6	13.7
	30 日後	7.3	16.3	11.6
	60 日後	8750.0	8.0	10.5
	90 日後	—	115.0	9.5

備考：C は 210 日の露天曝露後も 21.2 lit

第 14 表

溶剤	乾 燥 60°C		温 度 25.5°C	
	ゴム塗布量 g/m ²	水素漏洩量 lit/m ² /24H	ゴム塗布量 g/m ²	水素漏洩量 lit/m ² /24H
四鹽化炭素	95	750	95	750
ベンゼン	105	25	95	4.5
トルエン	105	3.1	80	4.5
キシレン	80	4.6		

を考へなければならない。現在樹脂系統のものが多く試みられて居るが、所期の目的には達して居ない。又織布に對し或る種の處理をなし、合成ゴムが接着し易くするのも一方法と思ふ。此の合成ゴム布の完成の暁は刮目に値するものがあると思ふ。即ち耐老化性、耐油性、耐熱性、耐ガス透過性等多くの優れた性質を有するが爲である。

3 浮囊舟用ゴム布

球皮に於ては専ら重量と氣密性に重點が置かれたが、囊布に於ては強度と氣密性が重視せらる。球皮には重量の制限があるが、浮囊舟に於ては其の使用上の目的から球皮程に重量の制限がなく、従つてゴムの附加量も相當多いから氣密性の點からも又作業上からも球皮に比して比較的容易である。

ア 織 布

囊布用織布としては綿布及び麻布が用ひられ特に抗力に重點が置かれる。一般の綿布の性能は下記の如くであるが、浮囊舟にも略これに近いものが使用せられる。

第15表 綿布性能表

重量 g/m ²	糸 数 /cm		抗 張 力 kg/m	
	經	緯	經	緯
90	37	32	900	800
95	38	35	880	850
170	28	28	980	1300
220	22	20	1200	1200
230	26	26	1200	1100
240	28	27	1400	1300

イ 囊布の構成

囊布の構成は二重兩面引、二重片面引、一重兩面引等がある。球皮と異り生地は外部に出さず、二重兩面引ではゴムを中間層として織布が平行に貼合され、更にその兩面にゴム引がなされる。最近では糊引機に依らずカレンダーに依る方法（トップピング）が多く用ひられる。此の方法はゴム附加量の多いものには能率及び溶剤の節約と云ふ點から非常に有利である。將來此の方法は技術の向上に依つて益々その用途を擴大する事と思ふ。二重片面引の場合はゴムを中間に介して織布が斜交或は平行に貼合され、表面にゴム引される。此の種のゴム布にあつては、多くの場合氣密性を中間層のゴムに依つて保持する。一重兩面引は織布の兩面にゴム引をなし、裏面に於て氣密を保たしめる。之等の種類の囊布は浮囊舟の構造及大小に依つて夫々區別して用ひられる。

（ウ） 囊布と壓力との關係

圓筒形の囊布に働く應力は内壓を受ける薄肉圓筒の公式に依り算出される。

P 囊体の内壓 kg/cm^2

r 圓筒の半径 cm

t 圓筒の厚み cm

O_t 切線應力 kg/cm^2

O_z 圓筒の軸方向の應力 kg/cm^2

$$O_t = \frac{Pr}{t} \quad O_z = \frac{Pr}{2t}$$

今假に内壓 102mm、囊体圓筒の半径 32cm とすれば、抗力 1'200 kg/m の囊布を使用した場合の安全率は次の如くである。

$$p = 0.134 \text{ kg/cm}^2 \text{ (水銀柱 102mm)}$$

$$r = 32 \text{ cm}$$

$$O_t = \frac{0.134 \times 32}{t} = \frac{4.296}{t} \text{ kg/cm}^2 = 4.296 \text{ kg/cm}$$

（布の應力は絲の力であるから t は無視される）

囊布の抗力 12 kg/cm (1'200 kg/m)

$$\therefore \text{安全率} = \frac{12}{4.296} = 2.8 \text{ 倍}$$

$$O_t = \frac{0.134 \times 32}{2t} = \frac{2.148}{t} \text{ kg/cm}^2 = 2.148 \text{ kg/cm}$$

$$\therefore \text{安全率} = \frac{12}{2.148} = 5.6 \text{ 倍}$$

以上の結果から普通浮囊舟の場合は切線應力に依つて安全率を見れば良い事になる。又囊体の内径の大小により同じ内壓でも囊体に働く應力は違つてくるから同じ抗力の囊布を使用した場合、内径の大きなものは同じ内壓でも囊布に働く應力は大きくなり安全率が低下する事になるわけである。故に囊布の應力は浮囊舟の構造に依つて充分検討される可きである。

4 結 言

以上兵器として用ひられるゴム布の特徴に就いて、簡単に記述したが、此種ゴム布の需要は戦時に於てはいよいよ増大す可く、しかも纖維資材の關係から所要の數量、性能の織布の入手は益々困難なる現状に於て、其生産の増加に、性能の向上に總ゆる努力が拂われつゝあるのであつて、兎角重工業方面の生産部門にのみ目を奪はれ勝の今日、かゝる様の下の力持的部門に於ても營々として努力が拂われつゝある事を認識して頂ければ望外の幸である。

三菱新型鋼板製高周波電氣爐

大阪製作所 田 宮 利 彦

内 容 梗 概

従来 アスベスト 板及黄銅板によつて構成されて居た外筐を鋼材を以て大部分代用し、過熱は磁氣遮蔽を行ふことにより防止し、機械的に丈夫にすると共に時局下入手困難な資材の節約に成功した。又水冷 ケーブルの使用により、銅材節約は勿論、構造上補修點檢を極めて樂にした。其他二三の改良點を述べた。

1. 緒 言

特殊鋼の製造並に再生には坩堝形の爐室を有する高周波爐並に低周波爐が必要缺くべからざる新鋭器である事は今や周知の事實であり、決戦下之等の電氣爐の需要も激増した事も申す迄もない。併し一方之等の電氣爐製作に要する資材中銅及黄銅材並にアスベスト 材等缺乏材料の使用も多く夙に之が代用を研究中の處今回第 1 圖の如き、新型爐を完成し種々試験や操業經驗の結果満足な成績を収むる事が出来たので茲にその概要を報告する次第である。

2. 改 良 の 要 點

新型爐の改良要點は次の二部分に大別される。

ア. 鋼板製外筐の採用

従來の爐は外函は白 アスベスト 板を黄銅板又は銅板にて補強して構成されて居たが、之等の構造は機械的に弱く、使用中熱膨脹によつて變形破損を起し易く之等の修理取替へに相當の手數と損失を生じ、延いては爐壁ライニングの壽命をも短縮せしむる等の缺點が多かつた。

之を第 1 圖の如く普通鋼板を主体として之に適當なる補強を用いた爐筐とし、その内側に磁氣遮蔽用の電氣鐵心を張り付け、外筐鋼板が過熱される事を防止した。尙該鐵心の内側並に爐底等は従來の如く アスベスト 板其他の防熱材にて覆ひ爐室からの熱や熔鋼に對して充分保護されてゐる。

之等の爐筐並に爐底部分は簡単に分解組立が出来る様に設計されてあるから萬一熔鋼が漏出しても爐の修理は従來通り迅速に出来る。

之の方法によつて従來使用されて居た黄銅補強板は全然不用となり、爐全体の所要全銅材の 30~40% を節約

し得る事となつた。

一方 アスベスト 板は従來の如く機械的荷重を負荷する事なく、單に防熱材として補助的に使用されるからその質も高級品を要せず且薄いもので間に合ふ譯であるから、之亦設計により且爐の容量によつて變るが大体 50% 位又は夫れ以上の節約をなし得る事となる。

之に對して新に珪素鋼板と外筐用軟鋼板及び型钢等の普通鋼材を要する事となるが之等の資材は單價も低廉であり、入手も上記の銅材やアスベスト 材等よりは遙に容易であるから製作が容易である。

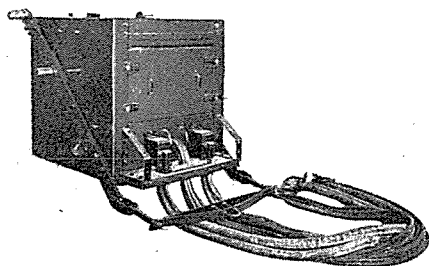
上記の如く外筐に鋼板を用ふる例は三菱式無鐵心型低周波爐に於ては數年前より實施し充分の經驗と好成績を得て居るので操業上何等の心配はないと考へられる。

イ. 爐底開閉器を廢止し水冷ケーブルの採用

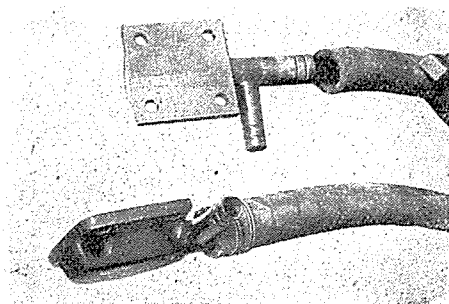
従來の爐線輪に主電流を導くために母線と爐との接続に爐底開閉器を設け、爐の傾注時は開路される様になつて居た、併しこの電流は 1 萬 アンペア 以上に達する例もあり、且塵埃の多い高温の爐側に設置されるためその損傷保修は頻繁で爐操業上の一大缺陷であつた。

今回採用の水冷式 ケーブル は三菱獨特のもので第 2 圖の如く構造簡單で、取扱も甚便利である、又損傷の虞なく半永久的に使用出來て、従來の爐へも簡単に改造取付け出来る。

本ケーブルは銅裸撚線上にゴム管を被せ、該撚線とゴム管の間の空隙に通水して冷却するものである。撚線であるから高周波大電流に對しても渦流損失は殆んどなく、冷却効果も且均一であるから、通常該 ケーブル 一本に對し 150 kW 相當の電流に用ひられる。従つて 600 kW



第 1 圖 三菱新型高周波電氣爐外觀
80037



第 2 圖 水冷式可撓ケーブル (3000 A 用)
80033

ミ シ ン 發 達 史 (2)

名古屋製作所 伊 東 璋

第二編 ミシンの基礎研究時代

1. ミシン 発明の曙光

手縫の煩雑さを解消して、もつと簡易なものに代へようとは、恐らく誰しも考へるところであつたらうが、それが現在のミシンの如き形を以て解決される迄には、幾多の発明家の血と汗とが流された。

ミシン 発明への實際的な努力は、大体 17 世紀前後から始つた様であるが、最初発明家の多數が陥つた失敗は、手縫をその儘に模倣しようとの試みであつた。而し之は實に困難な事であつた。何故なら、手縫の縫ひ方は低速度、間歇的で、糸の長さが制限され、且つ布の表裏に貫通する毎に糸の全長を引締めて行かねばならないからである。之は人の手の様に各縫目毎に複雑な運動をし、糸を屢々とり代へるといふ事によつてのみ初めて成されるのである。

ミシンの基礎ともいふべき最初の発明は、1755 年チャールス ワイザンサル (Charles F. Weisenthal) の特許である。之は後にハルマンの刺繍機に應用されたが、兩端を尖らし中央にメドをあけた針で、裁縫や刺繍の際に針を向け直さなくともよいといふ効果があつた。僅かな事ではあつたが、この発明こそは、その後本縫ミシンの発明に大きなヒントを與えるものとなつたのである。

2. かん縫ミシンの出現

道具の改造による裁縫の簡易化から一步進んで、裁縫を機械化せしめたのは、英國のトマス セント (Thomas Saint) である。彼は 1790 年に靴を縫ふ爲のかん縫ミシンを發明し、特許をとつた。

このミシンは突錐、又棒、水平送り板等を備へて居り、その縫目は下の様な順序で作られるものであつた。

- (1) 突錐が上下に動いて縫物に孔をあける。
- (2) 突出部のある軸が、この孔の上に糸を横へる。
- (3) 又棒が降りて糸を孔に押込み、糸輪を作る。
- (4) 縫物の下に往復する鉤がこの糸輪を掴む。
- (5) 送り器が縫物を一目だけ送る。
- (6) (1) (2) (3) の動作が繰返す。そして第 2 の糸輪は第 1 の糸輪の中に出来る。



第 4 圖



第 5 圖

以上の動作が連続して、第 4 圖の様な縫目が出来上るのである。

メドをもつ針こそ用ひなかつたが、その他の點に於ては、このミシンは現代のかん縫ミシンの基礎となつたもので、この發明によつてヒントを與へられた人々は、續々とミシンの研究に努力し、かん縫ミシンは之より飛躍的に發達したのである。

もともと發明は事象の創造よりも事象の適用の發見である。そして發見者の辛勞が甚大であるのに比べて、發見後萬人が之を用ゐるのは餘りにも容易である。セントによつてこの縫目が現れると、之に類した或は之を改良した種々の縫目が研究された。それ等の縫目はその後發達して夫々の名前を以て呼ばれるに至つたが、こゝでは一括して環縫として扱ふ事とする。

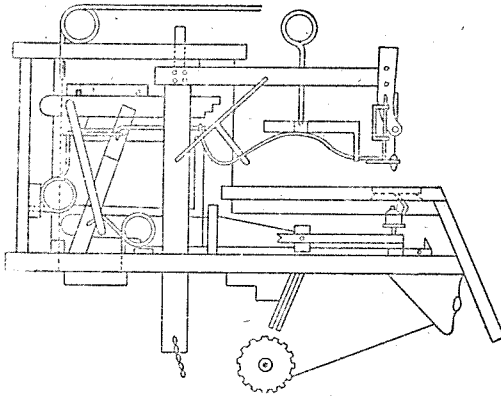
1804 年英國のトマス ストーン (Thomas Stone) 及びジェームス ヘンダーソン (James Henderson) のかどり縫ミシンは、セントにつぐ特許であつた。ついで 1814 年にウイーンのジョセフ マデルスパーヘル (Joseph Madersperger) も、之より幾分實用的なミシンの製作に成功した。

而し實際に生産に役立つミシンを製作したのは、フランスのパーセレミー ティモニー (Barthelemy Thimonnier) であつた。彼は貧しい裁縫師であつたが、1825 年ミシンの研究に志し、5 年間の研究によつて遂にかん縫ミシンの製作に成功した。

このミシンは鉤狀の針を有し、之が縫物を貫通し、縫物の下に出来てゐる糸輪を引かけて引上げる。この引上げられた糸輪の中に次の糸輪が引上げられるので、セントの縫目と逆に第 5 圖の如き縫目が出来上るのである。

このミシンは木製の不堅固なものであつたが、とにかく實用に供し得たので、當時戦亂の多かつた歐洲ではかなり多く使用された。

發明家 ティモニーの生涯は悲慘を極めたものであつた。當時紡績機や織機等の發明により職を失してゐた幾多の手工業者は激しい憎惡を機械發明者の上に注ぎ、各方面に於て暴動を起してゐたが、この無智凶暴な群衆はティモニーの家を襲つて機械と建物とを破壊し、彼も殺される程の目に會つたが、彼は之に屈せず 15 年後に更に改良を加へたミシンを製作して特許をとり、1848 年には三度び改善を施して金屬製のミシンを作り、佛蘭西及英國の特許権を得た。而るに同年 2 月の革命は、この發明の價値を奪ひ去つて了つた。彼の英國に於ける特許権は解消され、ミシンは 1851 年の博覽會に飾られたが、何の注意をも引かず、彼は 1857 年その偉大な發明に何の報いられるところもなく孤獨の内に不幸な生涯を終つた。



第6圖

たのであつた。

かん縫ミシンは、原理としては本縫ミシンよりも先に研究されたが、而し實用に耐える機械が生産されるに至つたのは1851年以後であつた。

1851年ボストンの仕立屋ウィリアムグローバー (William O. Grover) は2本の糸を用ゐて第7圖の様なかん縫をするミシンの製作に成功して特許を得た。

彼は後にボストンのベーカー (Baker) と共に工場を建てて Grover & Baker 會社を創立した。

又バージニアの農夫ジェームスギブス (James A. E. Gibbs) は27年間の永きにわたつてミシンを研究し1856年遂にかん縫ミシンを工夫したが、之は後にウイルコックス (J. Willcox) によつて改良され、Willcox & gibbs の型を樹立し同社の基となつた。

3. 本縫ミシンの發明

ミシンは先づかん縫の發明によつて一應の解決を與へられるに至つたが、この縫目は特徴として、糸の量を多く要し従つて縫目がふくらみ、糸の縮りが比較的弱く、且つ一本糸では解け易いといふおそれがあつた。之等の缺點を是正した縫目は夙に人々の求めるところであつた。

この要求に對して解答を與へ、現在の所謂本縫ミシンの基礎を作つたのは、隠れたる發明家 ウォルター ハント (Walter Hunt) であつた。

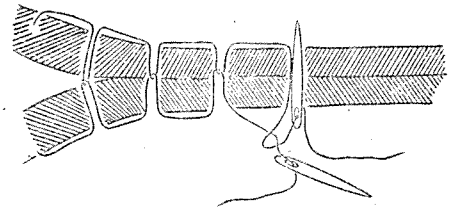
今第8圖の如く2本の縫針に夫々糸を通し、上の針を上下に貫通してその糸輪の間に下の針をくゞらせれば、布地の中央に結節を有する縫目が出る。

この縫目が所謂本縫であつて、糸縮りよく、糸の所要量が少く、縫目もふくらまないといふ利點がある。糸の所要量は、第4圖の縫目が縫全長の4倍半、第7圖の縫目が6倍半であるのに對し、第8圖の縫目では2倍乃至1倍半である。

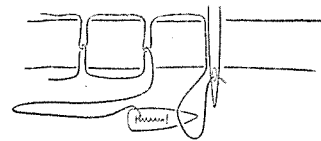
第8圖を更に考へれば、下の針を糸巻きに代へて糸輪の中を通してよい、又上の針を毎度回さなくともチャールスワイゼンサル の針の如くその儘上下して糸輪を作ればよい事が分る。この二つのヒントをハントは、糸巻きを抱いた梭と先端にメドのあいた針とによつて見事に



第7圖



第8圖



第9圖

實現せしめた。即ち第9圖の様に、先端にメドをもつ針が糸を引いて布地にさゝり、戻らうとする時布地の摩擦によつて糸は輪を作る。この輪の中を、糸巻きを抱いた砲弾狀の梭が通過すればよいのである。

この針と梭との發明は實にミシン發明の一大飛躍とも云ふべき重大な意義をもつものであつたが、この重大な發明にも拘らずハントは報いられるところが少なかつた。即ち彼は自分の發明の重大さを悟らなかつたのか或は金がなかつたのか、特許もとらず又世に之を發表する事もしなかつた。鍛冶屋アロー スミス (Arrow Smith) はハントのミシンに検討改良を加へたが、彼も亦特許申請も發表もしなかつたのである。

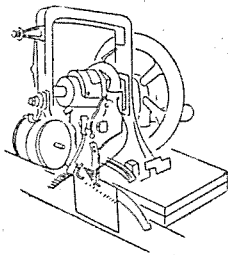
1853年に至つて漸くハントはこのミシンについて特許を申請したが、時既に遅く、先端にメドをもつ針は1841年ニュートン (Newton) とアーキボルド (Archbold) によつて特許をとられてゐたのであつた。

ニュートンとアーキボルドは手袋を縫ふためのかん縫ミシンを製作する際、このメドを先端にもつ針を英國の特許として得た。ハントの發明に遅れること實に7年であつたが、今猶若干の書物には彼等を最初の發明者として擧げてゐる状態である。

4. エリヤス・ハウのミシン

ハントやアーキボルドによつて原理的に解決されたミシンを更に實用の域にまで進めた者はエリヤスハウ (Elias Howe) であつた。彼はマサチューセツ州スペンサーの出身で、ハントの發明を少しも知らず、1843年頃から機械裁縫に志し約一年の研究によつて粗いモデルを完成し、1846年9月本縫機として米國の特許を得たのである。

ハウのミシンの要點は、12年前ハントによつて發明された先端にメドをもつ曲つた針と、梭と、間歇的な送り装置であつた。揺動する腕の先にはメドを先端にもつ



第 10 圖 ホウ の ミシン

針がとりつけられて水平に布に貫通する。この針が約 2 廻程貫通して引上げられる間に、糸巻きを抱いた梭がこの糸輪の間を通過して縫目を作るのである。縫物は正面の受合から出たピンの上に垂直に載り送り板によつて押しつけられ乍ら送られる。

ホウ は後にこの ミシン を改良して、針を垂直に動く様にし、水平の布台の上に縫物を布押えて押え、周囲に針をもつた車を無限に回轉し乍らその針で布を突刺して送る様にした。

ホウ の ミシン は以上の如く優秀な點もあつたが、實際に使用してみると、摩擦が多く、速度が遅く、騒音を發する等の缺點があり、又その送りは送りの方向を變へるのに不便であつて未だ完全とは云へなかつた。

5. ウイラー ウilson の ミシン

ホウ の ミシン が未だ不完全な點を多へ持つてゐるのに比べれば ウイラー ウilson の ミシン は遙かに優秀なものであつた。オーラン ウilson (Allan B. Wilson) は先人の研究を知らずに ミシン の研究をなしてゐたが、1849 年全回轉式 カマ による本縫機を發明し、ブリッジ ポートの事業家 ウイラー (N. Wheeler) と協力して Wheeler & Wilson 會社を建設した。

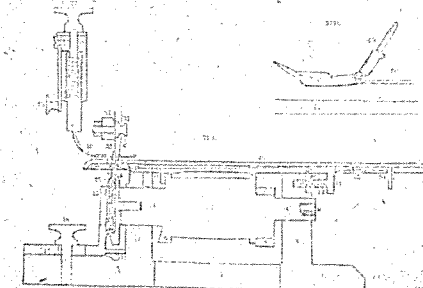
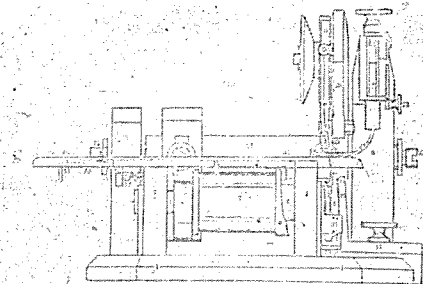
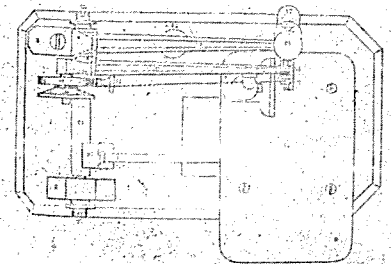
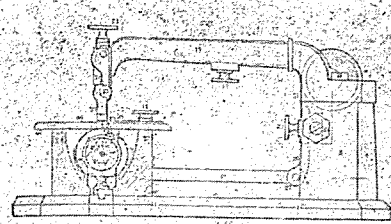
この ミシン は萬延元年我國の遣米使節が米國に於て初めて見た ミシン で、第 11 圖の如き構造である。

脚部の大 ハズミ 車よりかゝる ベルト は ベルト 車 (7) に動力を傳へ、回轉 カマ (15) を回す、一方偏心 カム (8) と クランク 棒 28 とによつて腕 (19) が搖動する。この腕の先には針棒 (29) があつて針 (35) を垂直に上下する。縫物は布台 (46) の上に載せられ、送り金 (14) によつて平に送られる。6, 10, 11, 12, 13 は送り機構である。この送り機構は 1850 年 11 月特許をとられ全回轉式 カマ と共に ウイラー ウilson 機の獨創になる特徴であつた。

この ウイラー ウilson 機は後に、性能に於ても生産に於ても、米國內で シンガー 機と首位を爭ふに至つた。

6. シンガー ミシン

ニューヨークの機械工アイザックメリットシンガー (Isaac Merritt Singer) は、かねてから ミシン に注目し研究を重ねてゐたが、1851 年從來の ミシン に種々の改良を加へたミシン を製作した。その形態は第 12 圖に示す様なもの



第 11 圖 ウイラー・Wilson ミシン

- | | |
|---------------|---------------|
| 1. ミシンの台 | 23. 布押への軸 |
| 2. 前の台 | 24. 腕の軸 |
| 3. 後の台 | 25. センター ネジ |
| 4. 調車の軸頭 | 26. クランク 腕 |
| 5. 回轉する カマ | 28. 連結棒 |
| 6. 送り カム | 29. 針の腕 |
| 7. 調車 | 30. ポピン |
| 8. 偏心 カム | 31. ポピンの プレーキ |
| 9. 糸捲軸 | 32. プレーキ の ネジ |
| 10. 送り金の戻し パネ | 33. 糸かけ |
| 13. 送り棒 | 34. 針止め |
| 14. 送り金 | 35. 針 |
| 15. ポピン | 46. 布台 |
| 20. 布押へ | 54. 送り止め |
| 21. 押へ加減 ネジ | |

で、その要點は次の如きものであつた。即ち從來は直接に針を握んで針と共に揺動してゐた腕を現在の様に鞏固で動かない胴とした事、送り装置に改良を加へた事、下糸の装置には舟形の梭を用ひた事等であつた。

この シンガー ミシンの完成は、先の ウイラー ウイルソン 機、グロバー ベーカー 機、ウイルコックス ギブス 機等と並んで ミシンの基礎研究を一應解決せしめ、之より生産機としてのミシンの現出に役立つたものであつた。

第三編 産業革命と生産の發展

1. 生産の必然性

手工的工具の應用とそれに相應する分業とを基礎とする マニファクチュア による生産が、需要の増大に追越された時、産業革命が始つた。

18世紀中葉から最初に英國を訪れたこの産業的旋風は、先づその端緒を繊維工業に發した。この時代、急激に増加した織物への需要とその低廉化、生産費の低減化の要求とは、之を根本的に解決すべき技術上の手段即ち機械の出現を招致した。

斯様な機械の應用は、紡績に機械に編物に刺繍に、相關聯しつつ次々と出現した。生産機は加工機の發達を招來し、又加工機は生産機の躍進を希求した。ミシンは之等の一環に關聯する加工機の一つなのであつた。

従つて之等各種機械の急激な發達によつて常に刺戟せられつゝ、たどたどしい研究を續けて來たミシンが、19世紀中頃に至つて、やうやくその實用化に成功するや、直ちに生産の熾烈な要求を受けた事は當然であつた。ミシンの狂熱的な生産の發展は茲に始り、遂に裁縫をして、分散的な家内労働から工場的生産へと轉化せしめるに成功したのである。



第12圖 最初のシンガーミシン

第1表 年代別發明一覽

年 代	發 明 者	機 械
1733	ジョンワイアット	紡 績 機
1738	ルイス ポール	〃
1745	ジヤック ウォカンソン	織 機
1755	チャールス ワイゼンサル	針 機
1769	アークライト	紡 績 機
1770	ハーグリーヴス	〃
〃	ジェンニー	〃
1772	ウ ッ ド	〃
1775	ク レ ン	編 物 機
1778	ウィリアム ハルトン	製 網 機
〃	ウィリアム ロス	〃
〃	トーマス ダヴィス	〃
〃	ジョン コルビン	〃
1779	クロンプトン	紡 績 機
1782	タラート	編 物 機
1785	カートライト	織 機
1790	トーマス セント	ミ シ ン
1791	ダウソン	編 物 機
1794	ホイットニー	操 綿 機
1803	ホロックス	織 機
〃	ジョンストン	〃
1804	トマス ストーン ジェームス ヘンダーソン	糊 付 機 ミ シ ン
1807	オルギール	編 物 機
1810	ジェラール	亞 麻 紡 績 機
1814	ジョセフ マデルスヘル	ミ シ ン
1815	アンドリウス	編 物 機
1822	ロバート	織 機
1825	ジェームス ケイ	亞 麻 紡 績 機
〃	パーセレーミー テイモニー	ミ シ ン
1829	ハイルマン	刺 繍 機
〃	ボ ッ ク	〃
1830	ロバート	織 機
1834	ペ ロ ー	捺 染 機
〃	オルター ハント	ミ シ ン
1835	ウォルター リッチ	編 網 機
1840	オネシフオール ペキュール	〃
1841	ニウトン アーケボルド	ミ シ ン
1843	エリアス ホウ	〃
1845	クラウスン	編 物 機
1849	ウィラー ウイルソン	ミ シ ン
1851	ウィリアム グロバー	〃
〃	アイザック シンガー	〃
1856	ジェームス ギブス	〃
1858	マゼウ タウンシエント	メ リ ヤ ス 機

2. 生産技術の躍進

急激に需要を増した繊維原料工業の加工機として、ミシンの生産が必然的に要求された事は前項に於て述べた通りであるが、更にミシンの生産に核心より力を與へ、かゝる要望を成就せしめたところの内的な力、即ち生産技術についても我々は觀察をせねばならない。

要約すれば、この生産の發達の技術的根柢は、當時顯著な跡を示してゐた工作機械の發達並に測定器の發達と、直接的には之等を基礎とする互換性生産方式の採用とにあつた。

(1) 工作機械と測定器の發達

先づ工作機械の發達としては、1775年 ウィルキンソンの中ぐり盤をはじめ、1797年 モーズレーの旋盤、1818年 ホイットニーのフライス盤、1839年には ボードマンの平削盤、又1848年には ステフェンフィッチのタレット、1854年 リンカーンのフライス盤、1855年 ロビンソン・ローレンスのタレット、同年 ブラウンの萬能フライス盤等が續々と現れ、工作法にも工作精度にも大きな變革をもたらした。

ミシンの生産と工作機械の發達とが相互的に進んだ事は幾多の事例によつて示されるが、今この内の二、三の例を拾つてみよう。1818年 エリホイットニーのフライス盤は1840年代には多くミシンの工作に使用されてゐたし、又1864年發明された研磨盤は、旋盤の送り台に砥石をつけた様なものであつたが、之は先づミシン針の仕上に用ひられた。又コルトの門下 スパンサーは、金屬ねじ製作用の automatic chncking machine を發明したので有名であるが、この着想は初めミシンのボビン切削用自動機の製作に成功する

事によつて暗示されたものであつた。

第13圖は米國のロビンソン・アンド・ローレンスの系統にある諸工場を示すものである。圖に見る如くブラウン・アンド・シャープやフェローズ等の著名な工作機械メーカーに伍して、ウィルソン、ホワイト等のミシンメーカーが多數ある。之等のメーカーの技術については後に述べる心算りであるが、とに角ミシンメーカーが工作機械メーカーから派立し又は並立して、相共に或關係を保ちながら發達し來つた事は、この一例を以ても明かに分るのである。

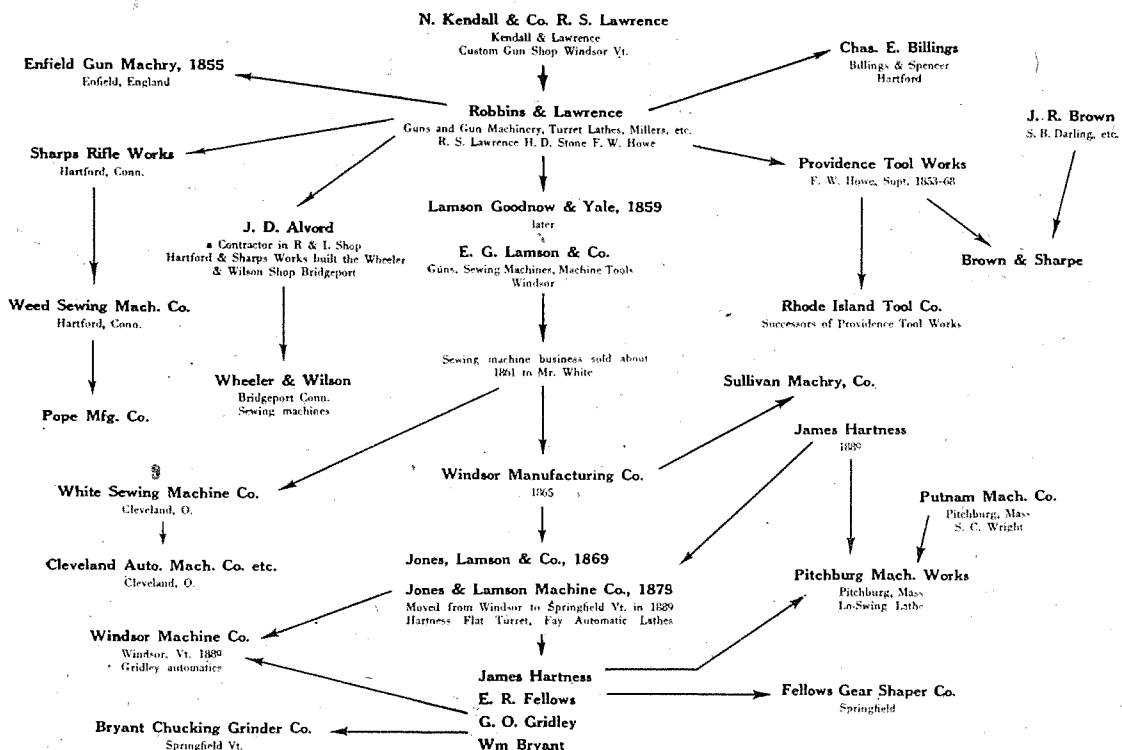
次に測定器の方面では、1766年 ヴットのマイクロメータをはじめとし、1848年 パーマーのマイクロメータ、1851年 ブラウンのノギス、1856年 ウィットウオースの測長器及びプラグゲージ、リングゲージ、1868年 ブラウンのマイクロメータ等が現れ、精度と實用の上に多大の發展を與へると同時に、工作精度といふ問題について大きな方向を指示してゐた。之等測定器の發達が生産技術に與へた影響については見逃せない。

(2) 互換性方式の採用

而し之等工作機械や計測器の發達が生んだ最も偉大な發明は互換性生産方式であつた。

既に1717年及び1785年に原理的に提唱されてゐた互換性生産方式は、エリホイットニーによつて1798年實際に採用され多大の成功を収めた。ホイットニーが初めて之を試みたのはマスケット銃であつたが、この互換性生産法が一たび米國のミシン製造會社に採り入れられるや、ミシンの生産にも又互換性生産法自身にも多大の發達を與へたのであつた。

かゝる互換性生産法のミシン製作に於ける成功は、更



に續いて、ミシン針、ねじ、タイプライタ、自轉車、自動車、計算器、金銭出納器、發動機、電話器等への適用となり、遂に全世界への普及となつて、今日の發達を見るに至つたのである。

斯様な工作機械や測定器の發達及び互換性生産法の採用が、ミシンの生産に大きな効果を與へてゐた證據として、1863年米國では12ヶ所の工場で70,000台以上のミシンを發賣してゐたのにひきかへ、英國では全部で25,000台しか使用されてゐなかつた事實は興味がある。

3. 各國における生産概況

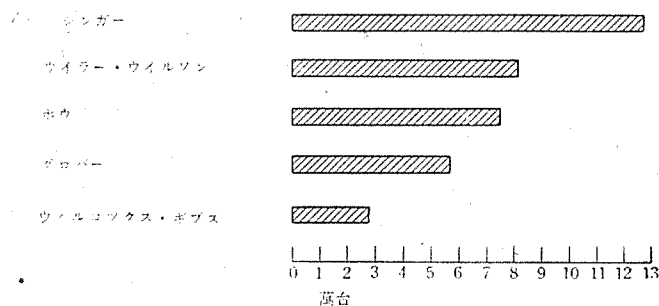
(1) 米 國

産業革命後より近代に至る米國の生産狀況は、恰も資本主義機構の確立と並んで、大會社で大量の生産をなし、年を逐ふてその生産量は増加を示した。

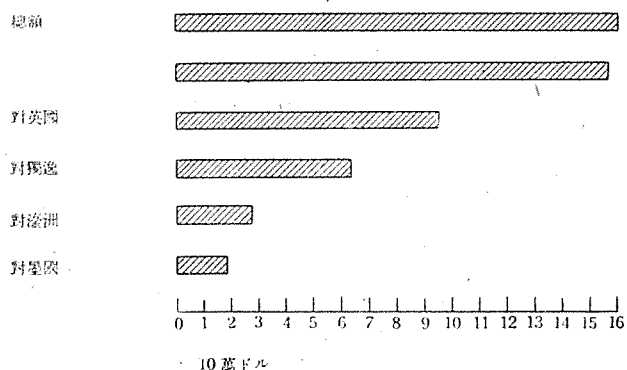
1853年ウイラー・ウイリソン會社では799台、1859年迄のシンガー社の生産は23,000台であつたが、1870年に至ると、第2表に示す如く、ウイラー・ウイリソン會社では83,208台、シンガー社では127,833台といふ激増ぶりである。

1894年に至ると全國の生産は2,500,000台に昇つた。この内譯はシンガーが600,000台、ウイラー・ウイリソン會社及びコホーム會社が夫々150,000台、ホワイト會社が100,000台、ドメスチック會社が100,000台その他スタンダード、エルドレッヂ、ウイリコックス・ギブス等が之に續いてゐた。1900年になると全國に於てミシン工場の數は65を算し、投下資本21,000,000ドル、勞働者は13,288人、その貸銀總額は15,030,000ドル、生産額は22,500,000ドルを示した。この内輸出額は3,180,000ドルで、その内譯は第3表に示す通りである。

第2表 米國の生産(1870年)



第3表 米國の輸出額(1900年)

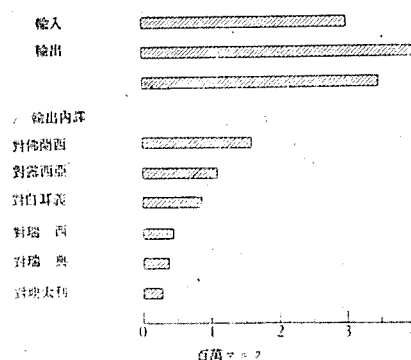


(2) 歐 洲

歐洲に於ては獨逸及び英國が多くの生産會社を有し、英國ではスコットランドのキルボーン・シンガー會社が首位を占めてゐた。1895年獨逸には283の經營者が存し、この内大經營者は107を數へ、勞働者は12,544人と云はれた。當時の貿易額は第4表に示す通りである。

又その他の國に於ける貿易額は第5表の通りである。

第4表 獨逸の貿易額(1859年)



第5表 歐洲諸國の貿易額

國 別	貿 易 額	年 代
伊 太 利	3,861,000	1900
英 國	31,044,000	
瑞 西	1,683,000	1901
佛 蘭 西	1,066,200	
奧 洪 利	3,099,000	

4. 生産への省察

以上3項に互つて産業革命後の各國の生産狀況について述べたのであるが、今更米英などの敵國の狀況を擧げるのは、決して彼等の過去を讃へたり驚いたりするの意ではなく、冷靜に之等の諸因を判斷して現在我々の生産への資としたいからである。

尤も當時の生産狀況を直ちに現在に當嵌めて考へる事は妥當でない。それは社會的背景といふ大きな要素を異にするからである。たとへば米國に於ては當時恰も資本主義の上昇期にあつた事も考へねばならない。當時資本主義昂揚の結果は、小工場はどしどしと大工場に吸収合併されて更に大きな資本の下に生産する様になつてゐた。シンガー社の如きは、その膨大な資本力を以て全米總生産額の45%を占め、更に1906年以後は世界市場の70%以上を確保するに至つた。ウイラー・ウイリソン會社の如く優秀な技術を備へた所ですら、シンガーの資本の下には屈服して1906年合併されざるを得なかつた。

同時に之等の生産の爲には資本主義的な販賣政策が苛責なく採られた事も忘れてはならない。

而しかうした社會的情勢を除いても、猶我等の生産に省察を與へるところの幾多のヒントが存在するのである。

ミシンの部分品を仔細に調べるならば、それが僅かな材料に如何に多くの加工を施してゐるものである事に氣付く。即ちミシンの生産費の内、加工費は材料費に對して極めて大きい率を占めてゐるのである。ミシンの生産に當つては、この特徴を見落してはならない。

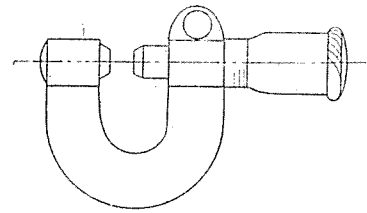
産業革命直後、工作機械や測定器の發達が生産を高める原因となつた事は既に述べたが、更に言ふならば、之等の機器を最もよく活用し得たところにこそ生産増加の鍵があつたのである。互換性生産法も一つの例であつたが、又自動機の應用もその一つであつた。各部分品を加工する一聯の特殊自動機が考案され、均一な部分品を多量に生産し得た事は何と云つても大きな強みであつた。同時に自動機にかける爲に材料の工作性が研究され、之にふさわしい成果をあげた。

産業革命後より近代に至る之等工作技術躍進の大きな段階は、凡そ下記の如く挙げられる。

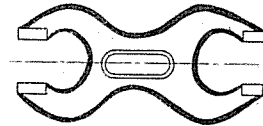
1882 年	リミットゲージ	プラット、ホイットニー
	時間研究	テラー
	動作研究	
1900 年	ブローチ	
"	ゲージブロック	ヨハンソン
"	高速度鋼	テラー
1913 年	ステライト	
1926 年	ウイディア	
1930 年	ファインボーリング	
	快削鋼	

之等の結果が生産の躍進に與へた効果は多大なものがある。遂に米國に於ては、ミシンの生産は大きな特色となり、その文化生活を著しく高めるに至つた。米國の工作機械技術については、今日知らぬ人は少いであらうが、ミシンに關する技術も最近迄工作機械技術と同程度を占めてゐたと思はれ、決して侮れぬものがある。

扱一方、頭を廻らして我國に於ける生産状況を見れば、一体如何程の生産技術が整備されてゐる事であらうか。國內にミシン製造會社は少くないが、その内幾つの會社が時間研究や動作研究を運用し、リミットゲージシステム



第 14 圖 1868 年の マイクロメータ



第 15 圖 1882 年の スナップリミットゲージ



第 16 圖 1889 年の プラグリミットゲージ

に徹し、又どれ程の工場が炭化 タングステン 工具を使ひこなし、又快削鋼について充分の認識を持つてゐる事であらう。自動機は無論のこと、單能機械の利用や取付具の活用ですら果して充分であらうか。シガー 會社が自動機や快削鋼をどしどし用ひてゐる事實や、1853 年 コルト が自己の工場に用ひた工具治具類が機械設備費と殆ど同額であつた等の事實を考へるならば、生産技術といふ問題に對して今こそ眞剣必死な検討が加へられねばならない時であらう。

既に五六十年前に米國に於て整備された生産の條件を、もし未だに我國の工場に於て採用し得ないとするならば、素手で戦はうとするに等しいと思はねばならぬ。生産は左様に甘いものではない。

米國が之等の成果をなした原因も動機も、全く資本のためであつた。然し幸ひ生産管理の眞實は、斯様な資本主義の下に於てより、國家的目標を確立してゐる際に於てこそ、一層よく發揮されるのではなからうか。

(つゞく)

最近の特許より

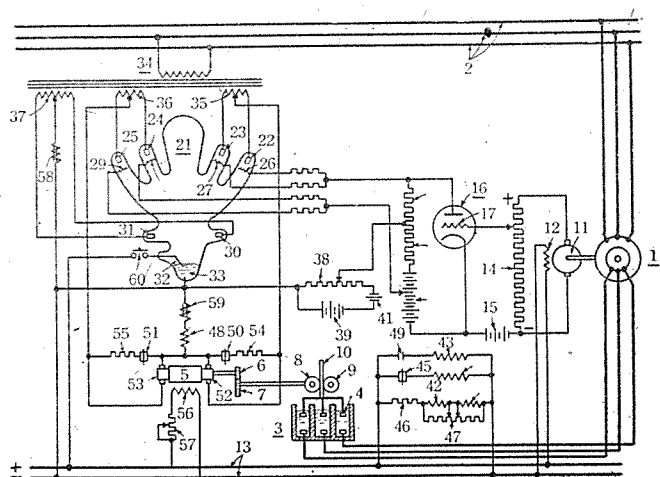
1. 調整方式

(三菱特許 第157232號)

被調整装置、例へば誘導電動機の自動速度調整に際し、一般には、二次抵抗を誘導電動機(1)の速度変化に応じて加減せしむるも、誘導電動機の慣性により過調整に陥入る缺點を有してゐる。

本發明は、上記の缺點を一掃せる、速度調整方式に関するものである。即ち、誘導電動機(1)の速度変化により、之に直結せる發電機(11)の發電電壓と、直流電源(15)の若電壓に比例せる陽極電流を真空管(16)に通ぜしめ、陽極電流の大小に依り、陽極回路の抵抗(19)(20)に於ける電壓降下にて制御せらるゝ放電装置(21)の陽極(24)(25)或は(22)(23)と陰極(33)間に選擇的に放電を生ぜしめ、可逆轉操作電動機(5)を正方向又は、逆方向に回轉せしめ液体抵抗器(3)の抵抗値を變化し、誘導電動機(1)の速度を修整せしむるも、所定時間後限時繼電器の接點(41)は開路する爲、放電装置(21)の格子電極は、直流電源(39)の電壓により急に負性となり放電を停止する。

然る時は制動抵抗(54)又は(55)を通じて發電制動を行ひ、操作電動機(5)をして急速に停止せしむるも、操作電動機(5)は二重電機子なるを以て、兩電機子に電壓を生じ發電制動を行ふ爲、一層



調整装置説明圖

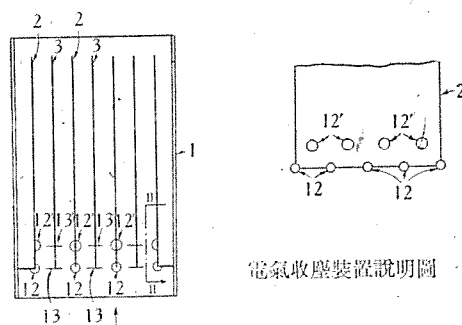
急速に停止し得る特徴を有するものである。

尙豫め調整せられたる時間中に、電動機(1)の速度が正規の値に達すれば、操作電動機(5)を其の儘停止せしむるも、上記速度が未だ規定外に在る場合は、再び放電装置(21)は放電し、操作電動機(5)を繼續作動せしむるものである。(菅野)

2. 電気收塵装置

(三菱特許 第154308號)

本發明は、複数の金屬板を平行に配設し、該金屬板の同一端部に、相對向する如く曲面突起と針狀突起を交互の板に設け、之等交互の板間に高電位傾度を生ぜしむる如く、異なる極性の電位を印加せしむる事に依り、線狀放電電極を使用せず、從來の收塵装置と同一効果を挙げ、且つ構造簡單、機械的強度大にして、形態小ならしめたるものである。



電気收塵装置説明圖

即ち、外函(1)内に平行に配列せる金屬板(2)(3)の、矢印にて示す瓦斯流の流入する同一端部に於て、交互の板の兩面、即ち金屬板(2)上に半球形突起(12)を、金屬板(3)上に針狀突起(13)を兩突起が相對向する如く、端縁に沿ひて等間隔に複数箇所に設置し又突起(12')(13')は突起(12)(13)と同様に然も位置を食違ふ如く設置し、金屬板(3)を電源の負端子に、金屬板(2)を正端に接続するものである。

而して、塵埃を含む瓦斯を矢印方向より流入せしむれば、瓦斯流中の塵埃は、金屬板群の流入端部に於て、突起間に於て負側に高電位傾度を有する區域を流通する際、負電荷を與へられ、次に、平行金屬板(2)(3)間の均一電界の作用に依り、正電位にある金屬板(2)に吸着せらるゝものである。(菅野)

Heaviside 演算子法に對する新しい考察と その電氣回路解析に於ける應用 (IX)

研 究 部 菅 野 正 雄

第 III 篇

Laplace 變換による演算子算法の擴張

内 容 梗 概

先づ、Laplace 變換に關して概略の考察を行ひ、然る後、第 I 篇に於て説明したる演算子算法と Laplace 變換との關係を論じ、此の關係を利用して演算子算法を擴張し得ることを示した。更に漸近展開の演算子算法による取扱ひに就ては、從來は兎角、徹底を缺く憾があつたのであるが、本文に於ては、同展開を取扱ふのに便利な一つの變換子を導き、説明の一貫性を期した。

第 I 章 Laplace 變換

§ 1.1. 緒 言

すでに第 I 篇の冒頭に於ても簡単に述べたる如く、最近に至る迄、演算子法の基礎は Laplace 變換にありと考へられてゐたのであるが⁽¹⁾、此の考への妥當ならざること、第 I 篇及び第 II 篇に於て詳述したる N—法の基礎並にその集中定數回路解析への應用に對する説明から明かであらう。蓋し、N—法は Laplace 變換とは全く別箇の獨立なる基礎の上に樹立せられてあるのである。

併し、N—法の適用範圍は、一般には常係數線型常微分方程式並にその初期値問題の記號的解法に局限され、準線型偏微分方程式の解法に對しては、極めて簡單なるもの以外にはその直接適用の困難となることは容易に察知せらるゝ所である。こゝに於て、この適用範圍を偏微分方程式の記號的解法へも擴張せんとする時は、何等かの補助手段を必要とするに至るのであつて、此の手段を與へるものが即ち Laplace 變換に他ならないのである。換言すれば、既述の如く、Laplace 變換は演算子法の基礎を與へるといふよりはむしろ、その擴張の基礎を與へるものなりと云ふことが出来るのである。

Laplace 變換法の見地より演算子法を論じたるものには、たとへば、Wagner 氏の著書⁽²⁾、或は櫻井氏の論文⁽³⁾等がある。併し前者の方法は、演算子法と云ふよりはむしろ Laplace 變換法そのものの立場を主としており、演算子法との關係を論ずることは極めて曖昧であつて、その結果は説明に往々徹底せざる所があるのであるが、殊に漸近展開に關する説明に於て大なる破綻を來してゐる。又後者の方法は、既述の如く零を被演算函數としてゐること及び發散積分を考慮せざるを得ない點等に於て猶、問題となるべき箇所が少くないと考へられる。

抑々、Laplace 變換自身は、確たる理論的根據を有するものであるから⁽⁴⁾、演算子法とは無關係に、函數變換

なる考へのみによつて問題を處理すれば、何等疑義の生ずべき理由はない筈であるが、しかも猶、これを利用して演算子法を擴張して用ふことの利益如何といふに、それは第 I 篇、第 I 章の末尾に於ても述べたる如く、Laplace 變換法を用ふ事によつて生ずる複素積分の一部又は全部を演算子算法によつて置き換へ、計算を或る程度簡略化し得らるゝ所にありと考へられるのである。然るに從來は、深い考慮なしに、これをその基礎の不明確なる H—法（從來の Heaviside 演算法）と關係附けて使用してゐた爲、此の利益を充分に享受してゐたとは言ひ難い上に、却つて種々の點に於て疑義又は誤謬を生ずる原因ともなつてゐたのである⁽⁵⁾。

初、Laplace 變換法が演算子法の擴張の基礎を與へ得るものとするならば、それは演算子法と密接なる接觸面を持たなくてはならないのであるが、これを明かにする爲には先づ、Laplace 變換に就き相當の説明を必要とするであらう。勿論その詳細に就ては文献⁽⁴⁾等を参照すればよいであらうから、本文に於ては主として演算子法との關係を論ずるに必要な部分に就き述べることにしよう。（因に是等に關する概略の説明はすでに發表せる所である⁽⁶⁾。）

§ 1.2. Laplace 變換

微分方程式論の教ふる所によれば⁽⁷⁾、次に示す如き線型常微分方程式

$$f(t, D)F(t) = \sum_{k=0}^n a_k(t) D^k F(t) = 0 \cdots \cdots (1.1)$$

$$\left(\text{但し、} D \equiv \frac{d}{dt}, \text{ 又、} a_k(t) \text{ は } t \text{ の有理函數とする。} \right)$$

の解を定積分の形で表はすのに、

$$F(t) \equiv \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} e^{t\lambda} g(\lambda) d\lambda \cdots \cdots (1.2)$$

なる λ -平面上の複素積分による変換を導入し、これを Laplace 変換と呼んでゐる。こゝに $g(\lambda)$ は λ の適宜の函数、 Γ は λ -平面上の閉曲線であつて、これ等を適宜に選定すれば (I. 2) 式の $F(t)$ をして (I. 1) 式の解たらしめ得ると云ふのである。

特に、(I. 1) 式の $a_k(t)$ がすべて常數 a_k なる場合、即ち方程式が常係數線型常微分方程式

$$f(D)F(t) \equiv \sum_{k=0}^n a_k D^k F(t) = 0 \quad \text{.....(I. 3)}$$

なる場合には、(I. 2) 式を (I. 3) 式に代入すれば、

$$\int_{\Gamma} e^{t\lambda} g(\lambda) \varphi(\lambda) d\lambda = 0$$

を得る。茲に

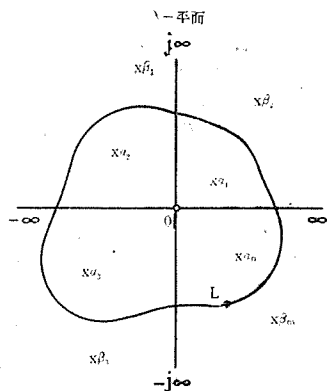
$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &\equiv \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k \\ &\equiv a_n (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2) \cdots (\lambda - \alpha_n). \end{aligned}$$

(但し、 $a_n \neq 0$ で、簡單の爲に α_k は何れも相等しくはないものとする。)

今、 $\psi(\lambda)$ を閉曲線 Γ 内では正則なる函数とし、又、 $\eta(\lambda)$ を

$$\eta(\lambda) \equiv \frac{\psi(\lambda)}{\varphi(\lambda)} \quad \text{.....(I. 4)}$$

の如くとり、 Γ として $\varphi(\lambda)$ の零點 $\alpha_k (k=1, 2, \dots, n)$ を悉く含む如き閉曲線をとれば、(第1圖参照)



第1圖

Cauchy の定理により、

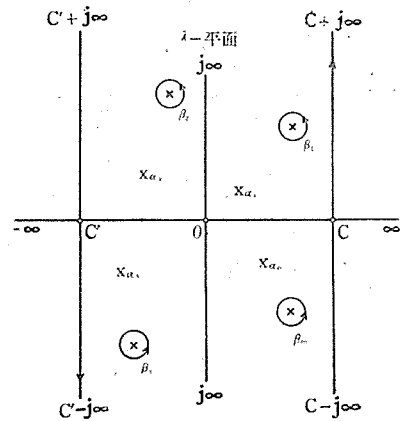
$$\int_{\Gamma} e^{t\lambda} \eta(\lambda) \varphi(\lambda) d\lambda = 0$$

となる。従つて

$$g(\lambda) = \eta(\lambda)$$

なる如き $g(\lambda)$ を用ひ變換して得られた $F(t)$ は (I. 3) 式の解となり得るわけである。

扱、(I. 2) 式に於て $\psi(\lambda)$ を適宜に選定して、閉曲線 Γ を第2圖の如く變形し得るものとしよう。然らば



第2圖

(I. 2) 式はこれを

$$\begin{aligned} F(t) &\equiv \frac{1}{2\pi j} \left\{ \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{t\lambda} g(\lambda) d\lambda \right. \\ &\quad \left. + \int_{c'-j\infty}^{c'-j\infty} e^{t\lambda} g(\lambda) d\lambda - \sum_k \oint_{\beta_k} e^{t\lambda} g(\lambda) d\lambda \right\} \end{aligned} \quad \text{.....(I. 5)}$$

と書くことが出来る。茲に β_k は $\psi(\lambda)$ の異常點を表はす。而して

$$G(t) \equiv \frac{1}{2\pi j} \left\{ \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{t\lambda} g(\lambda) d\lambda + \int_{c'-j\infty}^{c'-j\infty} e^{t\lambda} g(\lambda) d\lambda \right\} \quad \text{.....(I. 6)}$$

と書けば、次節に於て述べる事項により、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{t\lambda} g(\lambda) d\lambda &\equiv I\left(\frac{t}{a}\right) G(t) \\ &\equiv \begin{cases} G(t), & t > a, \\ 0, & t < a, \end{cases} \end{aligned} \quad \text{.....(I. 7)}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \int_{c'-j\infty}^{c'-j\infty} e^{t\lambda} g(\lambda) d\lambda &\equiv \left(1 - I\left(\frac{t}{a}\right)\right) G(t) \\ &\equiv \begin{cases} 0, & t > a, \\ G(t), & t < a, \end{cases} \end{aligned} \quad \text{.....(I. 8)}$$

(但し、 $-\infty < a$ なる a は $g(\lambda)$ の形より定まる適宜の實常數である。)

なることは容易にわかる。従つてこゝに、變換式 (I. 2) の代りに變換式 (I. 7) を用ひて (I. 3) 式の解

$$F(t) \equiv G(t) - \frac{1}{2\pi j} \sum_k \oint_{\beta_k} e^{t\lambda} g(\lambda) d\lambda$$

を得ることが可能となつて来るのである。以上のことから

$$I\left(\frac{t}{a}\right)G(t) \equiv \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{t\lambda} g(\lambda) d\lambda, \quad (c>0) \quad \dots\dots(I. 7)$$

は、特殊 Laplace 變換とも呼ばれ得るであらうが、周知の如く、電氣回路解析に利用される所謂 Laplace 變換は此の種のものであるから、今後本文に於ては Laplace 變換と云へば此の種の貌のものを指すこととする。

§ 1.3. Mellin の變換定理

前節に於て導いた Laplace 變換を更に一般的に利用するに當つて考慮すべき重要定理は、Mellin の變換定理⁽⁸⁾である。此の定理を今後の説明に都合のよいやうに述べれば次の如く云へるであらう。

(1). $-\infty < t < \infty$ なるすべての有限なる t の値に對して Dirichlet の條件を滿足する函数 (即ち斷片的に滑かな函数) $F(t)$ をとり、

$$f(\lambda) \equiv \varphi(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\lambda} F(t) dt, \quad (\bar{\mu}_0 \leq R_c(\lambda) \leq \bar{\mu}_1) \quad \dots\dots(I. 9)$$

とする時、右邊の積分は絶対收斂であるとする。茲に $\varphi(\lambda)$ は λ の適宜の函数とする。又、條件 $\bar{\mu}_0 \leq R_c(\lambda) \leq \bar{\mu}_1$ は、積分

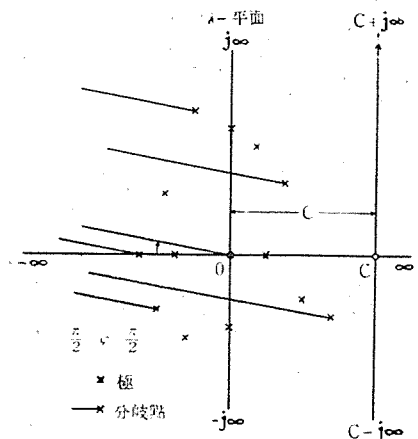
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\lambda} F(t) dt$$

を絶対收斂せしむる爲のものであつて、積分して得られた結果たる $f(\lambda)/\varphi(\lambda)$ が λ の函数として $\bar{\mu}_0 \leq R_c(\lambda) \leq \bar{\mu}_1$ の變域に於てのみ意味を有すると云ふことを示すものではない。即ち $\bar{\mu}_0$ 及び $\bar{\mu}_1$ は初より與へられた値ではなく、 $F(t)$ の性質によつて定まる筈のものである。然らば (I. 9) 式の關係を滿す $F(t)$ と $f(\lambda)$ との間には次の逆關係が成立する。

$$F(t) \equiv \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{e^{t\lambda}}{\varphi(\lambda)} f(\lambda) d\lambda, \quad \left(\begin{array}{l} -\infty < t < \infty, \\ \mu_0 < c < \mu_1 \end{array} \right). \quad \dots\dots(I. 10)$$

茲に μ_0 は λ -平面上 $f(\lambda)/\varphi(\lambda)$ の有限異常點が悉く直線 $\{(\mu_0 - j\infty) \rightarrow (\mu_0 + j\infty)\}$ の左側にある如く適宜にとられてあるものとし、又は等の異常點中に分岐點が存在するならば、此の分岐點と無限遠點との間に適宜の切斷を入れてあり、積分路は此の切斷を過ぎらざるものとし、且、 $\lambda=c$ に於て $\arg \lambda = 0$ とする。(第3圖参照) 即ち、(I. 10) 式の右邊の被積分函数は上述の積分路上に於て常に一價正則となつてゐるものとする。而して常数 c は、函数 $f(\lambda)/\varphi(\lambda)$ の性質により定まるものであるが、實際はこれを充分大なる正數としておいて差支へない。

(2). 逆に $f(\lambda)/\varphi(\lambda)$ が λ -平面上 $\bar{\mu}_0 \leq R_c(\lambda) \leq \bar{\mu}_1$ に於て正則で、且、



第 3 圖

$$(2. a). \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)/\varphi(\lambda)| d\nu, \quad (\nu = I(\lambda))$$

が收斂し、又、

(2. b). $f(\lambda)/\varphi(\lambda)$ が λ -平面上 $\mu_0 + \delta \leq R_c(\lambda) \leq \bar{\mu}_1 - \delta$ ($\delta > 0$) に於て、 $|I(\lambda)| \rightarrow \infty$ とする時一様に零に近附くものとする。〔今後、此の (2. a) 及び (2. b) なる二つの條件を Mellin の條件と呼び、 $f(\lambda)$ を Mellin の條件を滿足する函数と呼ぶこととする。〕 然らば (I. 10) 式の關係を滿足する $f(\lambda)$ と $F(t)$ との間には (I. 9) 式の關係が成立する。

かくの如く、(I. 9) 式と (I. 10) 式との關係は上述の條件の下に於ては全く等價であつて、此の内 (I. 10) 式の關係は前節に述べたる如く、Laplace 變換となつてゐる。よつて (I. 9) 式の關係をその逆變換と呼ぶこととする。而して上記の $F(t)$ として考へられるものは

(i). $-\infty < t < \infty$ に於ける一つの解析函数、たとへば e^{-t^2} ; $t^n e^{-t^2}$, ($n \geq 0$) 等、

(ii). $-\infty < t < \infty$ の中、 n 個 ($n=1, 2, 3, \dots$) の定點に於て ($n+1$) 箇の解析函数の一部づゝが接續されたるものである。

たとへば

$$I\left(\frac{t}{b}\right) t + \left\{ 1 - I\left(\frac{t}{b}\right) \right\} e^{-t^2}; \quad I\left(\frac{t}{0}\right) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu t}{\nu}$$

$$\text{等} \quad \left(\text{但し、} I\left(\frac{t}{b}\right) \equiv \begin{cases} 1, & t > b, \\ 0, & t < b \end{cases} \right)$$

であるが、本文に於て考察するものは主として、(ii) に屬するものゝ内、 $I\left(\frac{t}{b}\right) H(t)$ [b は有限、 $H(t)$ は $-\infty < t < \infty$ 中、少くも $t > b$ に於ては積分可能な解析函数、たとへば t^n ($n > -1$), $\sin t$, $\log t$ 等] の如きものである。これは蓋し、他の種類の函数に對する考察は適當なる考慮により、何れも此の種の函数に對する考察より推論し得るゝ爲でもあり、又、演算子法の主目的たる微分方程式の初期値問題解法に於ては、此の種の函数

が重要な役割を演ずる故でもある。^{*}(脚註1)たとへば、 $I\left(\frac{t}{b}\right)t^n e^{-t^2}$, ($n \geq 0$) に於て $b = -\infty$ ととれば (i) に $f(\lambda)$ 属する函数が得られる如きである。

然る時は、かゝる函数 $I\left(\frac{t}{b}\right)H(t)$ に対応する $\varphi(\lambda)$ は、 λ の函数として Mellin の条件の他に次の条件を有する。

$$|f(\lambda)/\varphi(\lambda)| < M |\varepsilon^{-b\lambda}|, \quad (\mu_0 \leq R_c(\lambda) \leq \mu_1). \quad \dots\dots (I. 11)$$

茲に M は

$$\left| \int_0^\infty \varepsilon^{-\lambda\tau} H(\tau+b) d\tau \right| < M, \quad (\mu_0 \leq R_c(\lambda) \leq \mu_1)$$

なる関係にある充分大なる正数である。何となれば、(I. 9) 式より

$$\begin{aligned} \left| f(\lambda)/\varphi(\lambda) \right| &= \left| \int_b^\infty \varepsilon^{-\lambda t} H(t) dt \right| \\ &= \left| \varepsilon^{-b\lambda} \right| \left| \int_0^\infty \varepsilon^{-\lambda\tau} H(\tau+b) d\tau \right| \end{aligned}$$

であるが、假定により

$$\int_0^\infty \varepsilon^{-\lambda\tau} H(\tau+b) d\tau, \quad (\mu_0 \leq R_c(\lambda) \leq \mu_1)$$

は絶対収斂であるからである。上述の条件を λ -平面上にて考へれば、 $t < b$ なる場合には第3圖の積分路を變形して $\lambda = c$ を中心とする半圓 (第4圖参照) とする時、

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{ABA'} \frac{\varepsilon^{t\lambda}}{\varphi(\lambda)} f(\lambda) d\lambda = 0 \quad \dots\dots (I. 12)$$

となり、 $t > b$ なる場合には第3圖の積分路を變形して $f(\lambda)/\varphi(\lambda)$ の異常点を囲む曲線と、 $\lambda = c$ を中心とする圓弧との和 (第5圖参照) とする時、

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{AB} + \int_{B'D} + \int_{D'E} + \dots\dots \right) \frac{\varepsilon^{t\lambda}}{\varphi(\lambda)} f(\lambda) d\lambda = 0 \quad \dots\dots (I. 13)$$

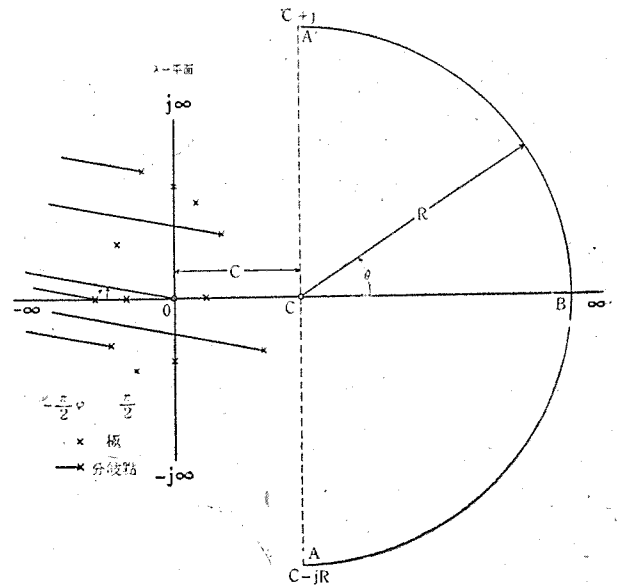
となることを意味する。^{*}(脚註2) 何となれば、(I. 11) 式により、 $t > b$ なる時は

^{*}脚註1: 考察を單に微分方程式の初期値問題解法のみに限るならば、(I. 9) 式及び (I. 10) 式の代りに従來の如く、

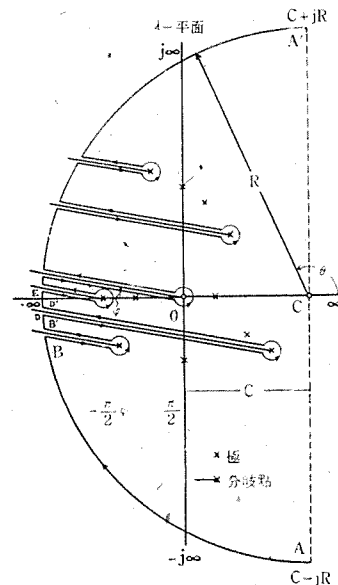
$$f(\lambda) \equiv \int_0^\infty \varepsilon^{-\lambda t} F(t) dt, \quad (Re(\lambda) > 0),$$

$$F(t) \equiv \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{\varepsilon^{t\lambda}}{\lambda} f(\lambda) d\lambda, \quad (t > 0, c > 0)$$

を使用しても差支へないのであるが、一般に函数變換論を論ずるには、(I. 9) 式及び (I. 10) 式をその儘用ひた方がよいであらう。



第4圖



第5圖

$$\begin{aligned} \left| \int_{ABA'} \frac{\varepsilon^{t\lambda}}{\varphi(\lambda)} f(\lambda) d\lambda \right| &< M \int_{ABA'} |\varepsilon^{-(b-t)\lambda}| |d\lambda| \\ &= RM \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\varepsilon^{-(b-t)R(\cos\theta + j\sin\theta)}| d\theta \\ &< 2RM \int_0^{\pi/2} \varepsilon^{-(b-t)R\cos\theta} d\theta \\ &< \frac{\pi M}{b-t} (1 - \varepsilon^{-(b-t)R}) \quad (9) \end{aligned}$$

が得られ、又、 $t > b$ なる時は同様にして

^{*}脚註2: (i) に属する函数は $b = -\infty$ としたものに相当するから、(I. 12) 式及び (I. 13) 式の關係は成立たなくなり、一般には零でない或る値を持つこととなる。

$$\left| \left(\int_{AB} + \int_{B'D} + \int_{D'E} + \dots \right) \frac{\varepsilon^{t\lambda}}{\varphi(\lambda)} f(\lambda) d\lambda \right|$$

$$< RM \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\varepsilon^{(t-b)R(\cos\theta + j\sin\theta)}| d\theta$$

$$< \frac{\pi M}{t-b} \left(1 - \varepsilon^{-(t-b)R} \right)$$

となり、何れも $R \rightarrow \infty$ の時零となるからである。

§ 1.4. 補助定理

演算子法の擴張には、前述の Mellin の變換定理は重要なものではあるが、これのみにては未だ少しく不十分なる所がある。たとへば (I. 10) 式に於て $f(\lambda)/\varphi(\lambda)$

$\equiv \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ とすれば、確かに

$$I\left(\frac{t}{0}\right) \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \equiv \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{\varepsilon^{t\lambda}}{\sqrt{\lambda}} d\lambda, \quad (c > 0),$$

..... (I. 14)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \equiv \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{-\lambda t}}{\sqrt{\pi t}} dt, \quad (R_e(\lambda) > 0)$$

..... (I. 15)

なる關係が成立つにも拘はらず、 $f(\lambda)/\varphi(\lambda) \equiv \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ は (2. a) の條件を満足してゐない。従つて Mellin の定理のみによつて (I. 15) 式より (I. 14) 式の成立つことを直ちに主張することが出来ない。こゝに於て次の補助定理を設ける。

補助定理 (i).

- (i. a). $F(t)$ は變域 $(b, t > b)$ に於て積分可能、
(i. b).

$$H(t) \equiv \int_b^t F(t) dt$$

とする時

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon^{-\lambda t} H(t) = 0, \quad (\mu_0 \leq R_e(\lambda) \leq \mu_1),$$

(i. c).

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{\varepsilon^{t\lambda}}{\varphi(\lambda)} f(\lambda) d\lambda$$

は變域 $(b + \delta, t)$ ($\delta > 0$) に於て一様收斂とする時、

$$f(\lambda) \equiv \varphi(\lambda) \int_b^\infty \varepsilon^{-\lambda t} F(t) dt, \quad (\mu_0 \leq R_e(\lambda) \leq \mu_1)$$

..... (I. 16)

ならば

$$I\left(\frac{t}{b}\right) F(t) \equiv \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{\varepsilon^{t\lambda}}{\varphi(\lambda)} f(\lambda) d\lambda,$$

($\mu_0 < c < \mu_1$)
..... (I. 17)

である。

補助定理 (ii).

(ii. a).

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{\varepsilon^{t\lambda}}{\varphi(\lambda)} f(\lambda) d\lambda \equiv I\left(\frac{t}{b}\right) F(t),$$

($\mu_0 < c < \mu_1$)

は變域 $(b + \delta, t)$ ($\delta > 0$) に於て一様收斂で且、 $F(t)$ は變域 $(b, t > b)$ に於て積分可能、

- (ii. b). $f(\lambda)/\lambda$ は Mellin の條件を満足する函数、
(ii. c).

$$\lim_{t \rightarrow b+0} \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{\varepsilon^{t\lambda}}{\varphi(\lambda)} \frac{f(\lambda)}{\lambda} d\lambda = 0,$$

($\mu_0 < c < \mu_1$)

とする時は

$$f(\lambda) \equiv \varphi(\lambda) \int_b^\infty \varepsilon^{-\lambda t} F(t) dt, \quad (\mu_0 \leq R_e(\lambda) \leq \mu_1)$$

である。(以上の證明に就ては附録 (I) を参照の事)

今後 便宜上前述の Mellin の條件又は此の補助定理 (ii) の條件を一括して Laplace-Mellin の條件 (L-M 條件) と呼ぶこととし、又 $f(\lambda)$ を該條件を満足する函数と呼ぼう。更に (I. 17) 式及び (I. 16) 式の關係を夫々 (I. 10) 式及び (I. 9) 式と同様、Laplace 變換及びその逆變換と呼ぶこととする。

尚、こゝで $\varphi(\lambda)$ に就て少しく考察する。(I. 9) 式及び (I. 10) 式を一見すれば $\varphi(\lambda) \equiv 1$ として毫も差支へない様に考へられる。事實純數學的見地からはそれにて少しも一般性は失はれないのであるが、應用上の立場からは $\varphi(\lambda)$ に種々の形を與へた方が都合のよい場合がある。たとへば本文に於て述べようとする演算子算法との關係を論ずる際は、

$$\varphi(\lambda) \equiv \lambda \varepsilon^{a\lambda}, \quad (a \text{ は實常數}),$$

又、フーリエ級數への應用を論ずる時は、

$$\varphi(\lambda) \equiv 1 - \varepsilon^{-\lambda T}, \quad (T: \text{周期})$$

ととるのが便利なのである。

§ 1.5. 常係數線型常微分方程式の解法に對する Laplace 逆變換

前節に於て導入した Laplace 逆變換を利用すれば、次に示す如く、微分方程式

$$f(D)F(t) \equiv \sum_{k=0}^n a_k D^k F(t) = G(t) \quad \text{..... (I. 18)}$$

の一般解を求めることが出来る。即ち a を適宜の實常數として (I. 18) 式より

$$\int_a^\infty \varepsilon^{-\lambda t} f(D)F(t) dt = \int_a^\infty \varepsilon^{-\lambda t} G(t) dt,$$

($\mu_0 \leq R_e(\lambda) \leq \mu_1$) (I. 19)

なる關係を作り、左邊に部分積分を施せば、

$$\begin{aligned}
\int_a^\infty \varepsilon^{-\lambda t} \frac{d^k F(t)}{dt^k} dt &\equiv \left[\varepsilon^{-\lambda t} \frac{d^{k-1} F(t)}{dt^{k-1}} \right]_a^\infty \\
&\quad + \lambda \int_a^\infty \varepsilon^{-\lambda t} \frac{d^{k-1} F(t)}{dt^{k-1}} dt \\
&\quad \dots \dots \dots \\
&\equiv \lambda^k \int_a^\infty \varepsilon^{-\lambda t} F(t) dt \\
&\quad - \sum_{r=0}^{k-1} \varepsilon^{-\lambda a} \lambda^r F^{(k-r-1)}(a) \dots \dots \dots (I. 20)
\end{aligned}$$

なるにより、

$$f(\lambda) \eta(\lambda) = \phi(\lambda) + \varepsilon^{-\lambda a} \sum_{k=1}^n \sum_{r=0}^{k-1} a_k \lambda^r F^{(k-r-1)}(a) \dots \dots \dots (I. 21)$$

の如き関係が得られる。但し、

$$\begin{aligned}
\eta(\lambda) &\equiv \int_a^\infty \varepsilon^{-\lambda t} F(t) dt, \quad (\mu_0 \leq (R_c \lambda) \leq \mu_1), \\
\phi(\lambda) &\equiv \int_a^\infty \varepsilon^{-\lambda t} G(t) dt, \quad (\mu_0 \leq R_c(\lambda) \leq \mu_1)
\end{aligned}$$

は存在するものとする。こゝに於て (I. 21) 式の兩邊に

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \varepsilon^{t\lambda} f(\lambda)^{-1} \cdot d\lambda, \quad (\mu_0 < c < \mu_1)$$

を作用せしめ、Mellin の變換定理及び補助定理を参照すれば、

$$\begin{aligned}
I\left(\begin{matrix} t \\ a \end{matrix}\right) F(t) &\equiv \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \varepsilon^{t\lambda} \eta(\lambda) d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \varepsilon^{t\lambda} f(\lambda)^{-1} \left\{ \phi(\lambda) \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon^{-\lambda a} \sum_{k=1}^n \sum_{r=0}^{k-1} a_k \lambda^r F^{(k-r-1)}(a) \right\} d\lambda, \\
&\quad (\mu_0 < c < \mu_1) \dots \dots \dots (I. 22)
\end{aligned}$$

を得るが、 a が適宜任意にとつてあることを考へれば、 $\varepsilon^{-\lambda a} F^{(k-r-1)}(a)$ も亦任意の常数となり、従つて (I. 22) 式にて定められたる $F(t)$ は吾々の所要の一般解を表はしてゐるのである。

若し、 $a=0$ とし、しかも $F^{(k-r-1)}(0)$ 等がすべて豫め與へられたるものと考へれば、(I. 22) 式は初期値問題の解を與へることゝなるのである。而して此の際、この解法の通常の解法と異なる點は、既述の如く、後者の方法に於ては先づ與へられたる微分方程式の不定積分解を求め、その際導入された積分常数を初期條件より決定す

るのであるが、前述の解法に於てはむしろ解法の初期に於てその初期條件を考慮してゐる爲に、積分常数を決定する手数の不要となる所にあると考へられる。

§ 1.6. 演算子法と Laplace 變換との類似點

前節に於て説明せる事柄より、演算子法と Laplace 變換との接觸點が奈邊にあるかを推測することが出来る。即ち演算子法によるならば、微分方程式 (I. 18) を解くのに、先づこれに $D-p$ 變換 (第 II 篇、§ IV.3 を参照のこと) を施して

$$f(p)F(t) = G(t) + \sum_{k=1}^n \sum_{r=0}^{k-1} a_k p^{r+1} F^{(k-r-1)}(a)$$

なる關係を作り、然る後兩邊に $f(p)^{-1}$ を作用せしめて

$$\begin{aligned}
F(t) &= f(p)^{-1} G(t) \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{r=0}^{k-1} a_k f(p)^{-1} p^{r+1} F^{(k-r-1)}(a)
\end{aligned}$$

を得るのであるが、これが所要の解なること及び若し $a=0$ で $F^{(k-r-1)}(0)$ 等が豫め與へられたるものであるとすれば、それが初期値問題の解を表はすことは第 II 篇に於て説明せる所である。而して初期値問題の解法としては、解法の初期に於て初期條件を考慮し、通常解法に於ける如く解の最終段階に於て積分常数を決定すると云ふ手續の省ける點に於て、Laplace 變換を利用せる解法と互に相通するものがあるのである。演算子法の擴張は實に此の類似に基づいてなされ得るものである。

第 II 章

演算子法の擴張

§ II.1. Laplace 變換子と逆變換子

前章に於て説明せることから次の變換子を定義する。

Laplace 變換子 $\equiv L(t, \lambda)$ 。

$$\begin{aligned}
&\equiv \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{\varepsilon^{t\lambda}}{\varphi(\lambda)} \cdot d\lambda, \\
&\quad \left(-\infty < t < \infty, \right. \\
&\quad \left. \mu_0 < c < \mu_1 \right), \dots \dots (II. 1)
\end{aligned}$$

Laplace 逆變換子 $\equiv L(\lambda, t)^{-1}$ 。

$$\begin{aligned}
&\equiv \varphi(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^{-\lambda t} \cdot dt, \quad (\mu_0 \leq R_c(\lambda) \leq \mu_1), \\
&\quad \dots \dots \dots (II. 2)
\end{aligned}$$

$$L(t, \lambda) L(\lambda, t)^{-1} \equiv L(\lambda, t)^{-1} L(t, \lambda) \equiv 1 \dots \dots \dots (II. 3)$$

而して $L(t, \lambda)$ の被演算函数は $L-M$ 條件を満足する函数、 $L(\lambda, t)^{-1}$ の被演算函数は $I\left(\begin{matrix} t \\ b \end{matrix}\right) G(t)$ の如き積分可能なる函数とする。〔今後單に積分可能なる函数と

云へば $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t} H(t) dt$, ($\mu_0 \leq R_c(\lambda) \leq \mu_1$) が収斂する如く $H(t)$ を指すこととする。

§ II.2. 變換子 $\sigma(t, \lambda)$ とその逆變換子 $\sigma(\lambda, t)^{-1}$

第 II 篇に於て、演算子法の大特徴は初期値問題解法に際し第一種解法の可能なることにあることを述べたのであるが、擴張された演算子法に於ても勿論その性質は保持さるべきである。その爲に必要な變換子 $\sigma(t, \lambda)$ 及びその逆變換子 $\sigma(\lambda, t)^{-1}$ を次の関係によつて定義する。

$$f(D) \sigma(t, \lambda) \equiv \sigma(t, \lambda) f(\lambda), \dots\dots\dots (\text{II. 4})$$

$$\sigma(\lambda, t)^{-1} f(D) \equiv f(\lambda) \sigma(\lambda, t)^{-1}, \dots\dots\dots (\text{II. 5})$$

$$\sigma(t, \lambda) \sigma(\lambda, t)^{-1} \equiv \sigma(\lambda, t)^{-1} \sigma(t, \lambda) \equiv 1, \dots\dots\dots (\text{II. 6})$$

但し、 $f(\lambda)$ は $f(D)$ が定義可能である如き λ の函数とする。又 $\sigma(t, \lambda)$ の被演算函数は λ の適宜の函数、 $\sigma(\lambda, t)^{-1}$ の被演算函数は $g(D) I\left(\frac{t}{b}\right) G(t)$ (ここに $g(D)$ は D の適當な函数、 $I\left(\frac{t}{b}\right) G(t)$ は (b, t) に於て積分可能な函数) の如きものとする。

§ II.3. $L(t, \lambda)$ と $\sigma(t, \lambda)$ 及び $L(\lambda, t)^{-1}$ と $\sigma(\lambda, t)^{-1}$ との関係

今、

$$f(D) \equiv \sum_{k=0}^n a_k D^k + \sum_{l=1}^m b_l D^{-l}, \quad (-\infty < t < \infty) \dots\dots\dots (\text{II. 7})$$

をとり、これに $L(\lambda, t)^{-1} I\left(\frac{t}{a}\right)$ を作用せしむれば

$$\begin{aligned} L(\lambda, t)^{-1} I\left(\frac{t}{a}\right) f(D) &\equiv \sum_{k=0}^n a_k \varphi(\lambda) \int_a^{\infty} e^{-\lambda t} D^k \cdot dt \\ &+ \sum_{l=1}^m b_l \varphi(\lambda) \int_a^{\infty} e^{-\lambda t} D^{-l} \cdot dt \end{aligned}$$

を得るが、右邊第一項に就ては (I. 20) 式を得たると同様にして、

$$\begin{aligned} \int_a^{\infty} e^{-\lambda t} D^k \cdot dt &\equiv \lambda^k \int_a^{\infty} e^{-\lambda t} \cdot dt \\ &- e^{-\lambda a} \sum_{r=0}^{k-1} \lambda^r C\left(\frac{a}{t}\right) D^{k-r-1}. \end{aligned}$$

が得られるから、

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k \varphi(\lambda) \int_a^{\infty} e^{-\lambda t} D^k \cdot dt &\equiv \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k L(\lambda, t)^{-1} I\left(\frac{t}{a}\right) \cdot \\ &- \sum_{k=1}^n a_k \frac{e^{-\lambda a} \varphi(\lambda)}{\lambda} \sum_{r=0}^{k-1} \lambda^{r+1} C\left(\frac{a}{t}\right) D^{k-r-1}. \end{aligned} \dots\dots\dots (\text{II. 8})$$

となり、又右邊第二項に就ても同様に部分積分により

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^m b_l \varphi(\lambda) \int_a^{\infty} e^{-\lambda t} D^{-l} \cdot dt &\equiv \sum_{l=1}^m b_l \frac{1}{\lambda^l} L(\lambda, t)^{-1} I\left(\frac{t}{a}\right) \cdot \\ &+ \sum_{l=1}^m b_l \frac{e^{-\lambda a} \varphi(\lambda)}{\lambda} \sum_{s=0}^{l-1} \frac{1}{\lambda^s} C\left(\frac{a}{t}\right) D^{-l+s}. \end{aligned} \dots\dots\dots (\text{II. 9})$$

となるから、(II. 8) 式と (II. 9) 式とを邊々相加へ

$$\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k + \sum_{l=1}^m b_l \lambda^{-l} \equiv f(\lambda)$$

及び

$$\frac{e^{-\lambda a} \varphi(\lambda)}{\lambda} \equiv L(\lambda, t)^{-1} I\left(\frac{t}{a}\right)$$

なる関係を考慮すれば、

$$\begin{aligned} L(\lambda, t)^{-1} I\left(\frac{t}{a}\right) f(D) &\equiv \left\{ f(\lambda) L(\lambda, t)^{-1} I\left(\frac{t}{a}\right) \cdot \right. \\ &- \sum_{k=1}^n a_k \sum_{r=0}^{k-1} \lambda^{r+1} L(\lambda, t)^{-1} I\left(\frac{t}{a}\right) C\left(\frac{a}{t}\right) D^{k-r-1} \\ &+ \left. \sum_{l=1}^m b_l \sum_{s=0}^{l-1} \lambda^{-s} L(\lambda, t)^{-1} I\left(\frac{t}{a}\right) C\left(\frac{a}{t}\right) D^{-l+s} \right\}. \end{aligned} \dots\dots\dots (\text{II. 10})$$

が得られる。但し、被演算函数を $F(t)$ とする時、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\lambda t} (D^k F(t)) &\equiv 0, \\ (k &= -m, -m+1, \dots, 0, \dots, n-1) \end{aligned}$$

とする。(此の條件の充されざる場合に就ては第 V 章を参照のこと)

而して一方、第 I 篇の (IV. 27) 式によれば、

$$\begin{aligned} f(D) \cdot &\equiv f(p) \cdot - \sum_{k=1}^n a_k \sum_{r=0}^{k-1} p^{r+1} C\left(\frac{a}{t}\right) D^{k-r-1} \\ &+ \sum_{l=1}^m b_l \sum_{s=0}^{l-1} p^{-s} C\left(\frac{a}{t}\right) D^{-l+s}, \end{aligned} \quad (-\infty < t < \infty)$$

であるから、これに $\sigma(\lambda, t)^{-1} I\left(\frac{t}{a}\right)$ を作用せしめ、

I. (VI. 7) 式参照すれば、

$$\begin{aligned} \sigma(\lambda, t)^{-1} I\left(\frac{t}{a}\right) f(D) \cdot &\equiv \left\{ \sigma(\lambda, t)^{-1} f(D) I\left(\frac{t}{a}\right) \cdot \right. \\ &- \sum_{k=1}^n a_k \sum_{r=0}^{k-1} \sigma(\lambda, t)^{-1} D^{r+1} I\left(\frac{t}{a}\right) C\left(\frac{a}{t}\right) D^{k-r-1} \\ &+ \left. \sum_{l=1}^m b_l \sum_{s=0}^{l-1} \sigma(\lambda, t)^{-1} D^{-s} I\left(\frac{t}{a}\right) C\left(\frac{a}{t}\right) D^{-l+s} \right\} \end{aligned} \dots\dots\dots (\text{II. 11})$$

を得る。然るに (II. 5) 式によれば $\sigma(\lambda, t)^{-1}$ のとり得

る被演算函数は $g(D) \mathbf{I} \left(\begin{smallmatrix} t \\ b \end{smallmatrix} \right) G(t)$ の如きものであるが、特に此の函数自身が又積分可能なる時は、 $\sigma(\lambda, t)^{-1}$ と $L(\lambda, t)^{-1}$ とは相等しと定めるならば、(II. 10) 式及び (II. 11) 式の左邊同志は全く相等しくなるから、兩式の右邊同志を比較して

$$\sigma(\lambda, t)^{-1} f(D) \cdot \equiv f(\lambda) L(\lambda, t)^{-1} \cdots \cdots (\text{II. 12}).$$

を得る。勿論此の場合の被演算函数は $\mathbf{I} \left(\begin{smallmatrix} t \\ b \end{smallmatrix} \right) G(t)$ の如き形の積分可能なるものに限るのである。而して (II. 12) 式より容易に

$$f(D) L(t, \lambda) \cdot \equiv \sigma(t, \lambda) f(\lambda) \cdot \cdots \cdots (\text{II. 13})$$

なる関係が得られる。(II. 13) 式と (II. 14) 式とを比較すれば、 $\sigma(t, \lambda)$ がその被演算函数として $L-M$ 条件を満足する如きものとつた時は、それは $L(t, \lambda)$ に等しいことがわかる。又、(II. 12) 式及び (II. 13) 式の関係は $f(\lambda)$ が λ 又は λ^{-1} の有理整函数の場合に就き導かれたものであるが、實は $f(\lambda)$ が λ の有理函数である場合にも尙成立ち得るものである。何となれば、(II. 12) 式の逆関係を作れば、

$$f(D)^{-1} \sigma(t, \lambda) \cdot \equiv L(t, \lambda) f(\lambda)^{-1} \cdot \cdots \cdots (\text{II. 14})$$

を得るが、此の関係を有理整函数 $g(\lambda)$ に作用せしめれば、

$$f(D)^{-1} \sigma(t, \lambda) g(\lambda) \cdot \equiv L(t, \lambda) f(\lambda)^{-1} g(\lambda) \cdot$$

となる故、(II. 13) 式の関係により、

$$f(D)^{-1} g(D) \sigma(t, \lambda) \cdot \equiv L(t, \lambda) f(\lambda)^{-1} g(\lambda) \cdot$$

が得られるからである。

更に、(II. 12) 式及び (II. 13) 式を用ひて行ふ演算に於て $L(\lambda, t)^{-1}$ の被演算函数としては常に $\mathbf{I} \left(\begin{smallmatrix} t \\ a \end{smallmatrix} \right) H(t)$ の如き形の積分可能なるもの、又 $L(t, \lambda)$ の被演算函数としては $L-M$ 条件を満足するもののみが取扱はれるものとすれば、

$$L(\lambda, t)^{-1} f(D) \cdot \equiv f(\lambda) L(\lambda, t)^{-1} \cdot, \cdots \cdots (\text{II. 15})$$

$$f(D) L(t, \lambda) \cdot \equiv L(t, \lambda) f(\lambda) \cdot \cdots \cdots (\text{II. 16})$$

なる関係を得ることが出来る。是等兩式が演算子法を擴張する基礎を與へるに役立つものである。而して (II. 4) 式と (II. 5) 式、(II. 12) 式と (II. 13) 式若しくは (II. 15) 式と (II. 16) 式との関係式の何れを用ふべきかは一に被演算函数の性質により決定さるべきものであつて、此の事に注意せざる時は思はざる誤に陥る虞がある。その一例に就ては第 I 篇、§ VII. 5 に於てすでに述べた所である。

§ II. 4. 變換子 $L_c(t, \lambda)$ と $L_c(\lambda, t)^{-1}$ 及び

$$\sigma_c(t, \lambda) \text{ 及び } \sigma_c(\lambda, t)^{-1}$$

變換子 $L(t, \lambda)$ 及び $L(\lambda, t)^{-1}$ に於て、特に

$$\varphi(\lambda) \equiv \lambda e^{\mu_1}, \quad \mu_0 = 0, \quad \mu_1 = \mu_2 = \infty$$

とつたものを夫々 $L_c(t, \lambda)$ 及び $L_c(\lambda, t)^{-1}$ と書くこととする。即ち

$$L_c(t, \lambda) \cdot \equiv \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{e^{(t-a)\lambda}}{\lambda} \cdot d\lambda, \quad \left(\begin{smallmatrix} -\infty < t < \infty, \\ c > 0 \end{smallmatrix} \right), \cdots (\text{II. 17})$$

$$L_c(\lambda, t)^{-1} \cdot \equiv \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda(t-a)} \cdot dt, \quad (R_c(\lambda) > \mu_0) \cdots \cdots (\text{II. 18})$$

である。又、是等に對應する $\sigma(t, \lambda)$ 及び $\sigma(\lambda, t)^{-1}$ を夫々 $\sigma_c(t, \lambda)$ 及び $\sigma_c(\lambda, t)^{-1}$ と書くこととする。

§ II. 5. 積分可能な函数の演算子表示と λ -表示及び p -表示

$F(t)$ を積分可能とする時、これ迄に述べたる所により、

$$f(\lambda) \equiv L_c(\lambda, t)^{-1} F(t) \equiv \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda(t-a)} F(t) dt, \quad (R_c(\lambda) > \mu_0),$$

$$F(t) \equiv L_c(t, \lambda) f(\lambda) \equiv \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{e^{(t-a)\lambda}}{\lambda} f(\lambda) d\lambda, \quad \left(\begin{smallmatrix} -\infty < t < \infty, \\ c > 0 \end{smallmatrix} \right)$$

であるが、こゝで特に $f(\lambda)$ が λ の有理函数となつてゐるものとすれば、(II. 16) 式の関係及び

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{e^{(t-a)\lambda}}{\lambda} d\lambda \equiv \mathbf{I} \left(\begin{smallmatrix} t \\ a \end{smallmatrix} \right), \quad \left(\begin{smallmatrix} -\infty < t < \infty, \\ c > 0 \end{smallmatrix} \right) \cdots \cdots (\text{II. 19})$$

なる関係を考慮すれば、

$$f(D) \mathbf{I} \left(\begin{smallmatrix} t \\ a \end{smallmatrix} \right) \equiv F(t), \quad (-\infty < t < \infty) \cdots \cdots (\text{II. 20})$$

を得る。吾々は此の $f(D) \mathbf{I} \left(\begin{smallmatrix} t \\ a \end{smallmatrix} \right)$ を積分可能な函数 $F(t)$ の演算子表示と名付け、これに對し、 $f(\lambda)$ を同函数の λ -表示と呼ぶこととしよう。

扱、上に定義した函数 $F(t)$ の演算子表示は、 $f(\lambda)$ が $L-M$ 条件を満足する λ の有理函数の場合に限られてゐるのであるが、吾々は今後此の表示を擴張して、 $f(\lambda)$ が一般に $L_c(t, \lambda)$ 變換に關して $L-M$ 条件を満足する任意の函数である場合にも、(II. 20) 式の表現法を其の儘踏襲し、 $f(D) \mathbf{I} \left(\begin{smallmatrix} t \\ a \end{smallmatrix} \right)$ を $F(t)$ の演算子表示と呼ぶこととする。此の $f(D) \mathbf{I} \left(\begin{smallmatrix} t \\ a \end{smallmatrix} \right)$ は $\mathbf{I} \left(\begin{smallmatrix} t \\ b \end{smallmatrix} \right) H(t)$ (b は $b \equiv a$ なる常數) の如き函数を表はすものなることは前章に於て述べたる所であるが、特に $b = a$ なる場合即ち

$$F(t) \equiv \mathbf{I} \left(\begin{smallmatrix} t \\ a \end{smallmatrix} \right) \dot{H}(t)$$

なる場合には (II. 20) 式は

$$f(D) \mathbf{I}\left(\frac{t}{a}\right) \equiv \mathbf{I}\left(\frac{t}{a}\right) f(p) \cdot 1 \equiv \mathbf{I}\left(\frac{t}{a}\right) H(t)$$

となり、従つて

$$f(p) \cdot 1 \equiv H(t), \quad (-\infty < t < \infty)$$

とすることが出来るから、此の場合 $f(p) \cdot 1$ を解析函数 $H(t)$ (脚註の p -表示と名付けよう。此の $f(p)$ が p の有理函数である場合の算法が即ち第 I 篇に於て説明したる演算子算法に他ならないのである。

扱、かくの如き p -表示又は演算子表示に、次章に於て述べる擴張された變位定理と、第 I 篇に於て説明したる演算子算法とを適用すれば、 λ -表示による λ -平面上の複素積分の一部又は全部を演算子算法によつて置換し得、計算を或る程度簡略化し得らるゝ便があるのである。即ち $f(\lambda)$ が λ の有理函数に非ざる場合に對する $F(t)$ の或るものは、複素積分若しくはその他の適宜の方法により決定しておかなくてはならないが、それより誘導される諸關係の計算には、一々複素積分を用ひずとも演算子算法を利用して便益の得られるものが多々あるのである。その實例は次章以下に於ける諸例に就て睹ることが出来るであらうが、今後此の演算を擴張された演算子算法と呼ぶこととする。

第 III 章

擴張された演算子算法

斷りなき限り、本章以下に於て取扱ふ t の函数は適宜微分及び積分可能なものとし、又 λ の函数は $L_c(t, \lambda)$ 變換に關し、 $L-M$ 條件を満足するものとする。

§ III.1. 擴張された變位定理

α を常數とすれば、

$$f(D+\alpha) \cdot 1 \equiv \varepsilon^{-\alpha t} f(D) \varepsilon^{\alpha t} \cdot, \dots\dots\dots (\text{III. 1})$$

$$f(p+\alpha) \cdot 1 \equiv \varepsilon^{-\alpha t} f(p) \varepsilon^{\alpha t} \cdot, \dots\dots\dots (\text{III. 2})$$

である。但し、 $f(D)$ 又は $f(p)$ は夫々 D 又は p の有理函数とは限らない。

證明:

先づ、

$$f(D+\alpha) \mathbf{I}\left(\frac{t}{a}\right) \equiv \varepsilon^{-\alpha t} f(D) \varepsilon^{\alpha t} \mathbf{I}\left(\frac{t}{a}\right)$$

を證明する。定義に従ひ

$$f(D+\alpha) \mathbf{I}\left(\frac{t}{a}\right) \equiv \frac{1}{2\pi j} \int_{-c-j\infty}^{+c-j\infty} \frac{\varepsilon^{(t-a)\lambda}}{\lambda} f(\lambda+\alpha) d\lambda, \\ (c>0) \dots\dots\dots (\text{III. 3})$$

であるが、この式で $\lambda = \mu - \alpha$ と置き、又 $c + \alpha = b$ とし、 b が充分大なる正數となる如くに c も充分大きくとられてあるものとすれば、

$$f(D+\alpha) \mathbf{I}\left(\frac{t}{a}\right) \equiv \frac{1}{2\pi j} \int_{b-j\infty}^{b+j\infty} \frac{\varepsilon^{(t-a)(\mu-\alpha)}}{\mu-\alpha} f(\mu) d\mu, \\ (b>0)$$

*脚註: $H(t)$ は $t > a$ に於ては t の實函数であるが、 $t > a$ に於ては必ずしも實函数とは限らない。

$$\equiv \varepsilon^{-\alpha(t-a)} f(D) \frac{D}{D-\alpha} \mathbf{I}\left(\frac{t}{a}\right)$$

$$\equiv \varepsilon^{-\alpha(t-a)} f(D) \mathbf{I}\left(\frac{t}{a}\right) \varepsilon^{\alpha(t-a)}$$

$$\equiv \varepsilon^{-\alpha t} f(D) \varepsilon^{\alpha t} \mathbf{I}\left(\frac{t}{a}\right)$$

となる。次に $g(\lambda)$ を λ の適宜の任意函数として

$$f(\lambda+\alpha) g(\lambda) \equiv \psi(\lambda+\alpha)$$

と置く時は、上述の證明により

$$f(D+\alpha) g(D) \mathbf{I}\left(\frac{t}{a}\right) \equiv \psi(D+\alpha) \mathbf{I}\left(\frac{t}{a}\right)$$

$$\equiv \varepsilon^{-\alpha t} \psi(D) \varepsilon^{\alpha t} \mathbf{I}\left(\frac{t}{a}\right)$$

$$\equiv \varepsilon^{-\alpha t} f(D) \varepsilon^{\alpha t} \varepsilon^{-\alpha t} g(D-\alpha) \varepsilon^{\alpha t} \mathbf{I}\left(\frac{t}{a}\right)$$

$$\equiv \varepsilon^{-\alpha t} f(D) \varepsilon^{\alpha t} g(D) \mathbf{I}\left(\frac{t}{a}\right)$$

が得られる。よつて (III. 1) 式の關係が求められる。従つて又、 $f(p)$ なる演算子函数が定義されるとすれば、

$$f(D+\alpha) \mathbf{I}\left(\frac{t}{a}\right) \cdot \equiv \varepsilon^{-\alpha t} f(D) \varepsilon^{\alpha t} \mathbf{I}\left(\frac{t}{a}\right) \cdot$$

は

$$\mathbf{I}\left(\frac{t}{a}\right) f(p+\alpha) \cdot \equiv \mathbf{I}\left(\frac{t}{a}\right) \varepsilon^{-\alpha t} f(p) \varepsilon^{\alpha t} \cdot$$

となる故、(III. 2) 式の關係が得られるのである。

例.

$$\sqrt{p+\alpha} \cdot 1 \equiv \varepsilon^{-\alpha t} \sqrt{p} \varepsilon^{\alpha t} \cdot 1$$

$$\equiv \varepsilon^{-\alpha t} \sqrt{p} \frac{p}{p-\alpha} \cdot 1$$

$$\equiv \varepsilon^{-\alpha t} \left(1 + \frac{\alpha}{p-\alpha}\right) \frac{1}{\sqrt{\pi(t-a)}}$$

$$\equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{\varepsilon^{-\alpha(t-a)}}{\sqrt{t-a}} + \alpha \int_a^t \frac{\varepsilon^{-\alpha(t-a)}}{\sqrt{t-a}} dt \right\}.$$

§ III.2.

$$f(\lambda) \equiv \varepsilon^{\alpha \lambda}, \quad (\alpha: \text{實常數})$$

なる時は

$$f(D) \cdot \equiv C\left(\frac{t+\alpha}{t}\right) \cdot \dots\dots\dots (\text{III. 4})$$

であるが、此の關係はすでに第 I 篇の (VI. 11) 式

$$\varepsilon^{\alpha D} \mathbf{I}\left(\frac{t}{a}\right) \cdot \equiv \mathbf{I}\left(\frac{t}{a-\alpha}\right) C\left(\frac{t+\alpha}{t}\right) \cdot$$

を得る際に用ひられたものである。

§ III.3. 擴張された重疊定理

§§ III.3.1.

$$f_1(D) \mathbf{I}\left(\frac{t}{a}\right) \equiv \mathbf{I}\left(\frac{t}{t_1}\right) F_1(t),$$

$$f_2(D) \mathbf{I}\left(\frac{t}{a}\right) \equiv \mathbf{I}\left(\frac{t}{t_2}\right) F_2(t)$$

とすれば

$$D^{-1} f_1(D) f_2(D) \mathbf{I}\left(\frac{t}{a}\right)$$

$$\begin{aligned}
& \equiv D^{-1} f_1(D) \mathbf{I} \left(\begin{smallmatrix} t \\ t_2 \end{smallmatrix} \right) F_2(t) \\
& \equiv D^{-1} f_2(D) \mathbf{I} \left(\begin{smallmatrix} t \\ t_1 \end{smallmatrix} \right) F_1(t) \\
& \equiv \mathbf{I} \left(\begin{smallmatrix} t \\ t_1+t_2-a \end{smallmatrix} \right) \int_{t_1+t_2-a}^t F_1(\tau-t_2+a) \\
& \quad F_2(t-\tau+t_2) d\tau \cdots (\text{III. 5}) \\
& \equiv \mathbf{I} \left(\begin{smallmatrix} t \\ t_1+t_2-a \end{smallmatrix} \right) \\
& \quad \int_{t_1}^{t-t_2+a} F_1(\tau) F_2(t-\tau+a) d\tau. \\
& \quad \cdots \cdots \cdots (\text{III. 6})
\end{aligned}$$

證明：

假定により、

$$\begin{aligned}
f_1(\lambda) & \equiv \lambda \int_{t_1}^{\infty} e^{-\lambda(t-a)} F_1(t) dt \\
& \equiv \lambda e^{-\lambda(t_1-a)} \int_0^{\infty} e^{-\lambda u} G_1(u) du, \\
& \quad (G_1(u) \equiv F_1(u+t_1)), \\
f_2(\lambda) & \equiv \lambda \int_{t_2}^{\infty} e^{-\lambda(t-a)} F_2(t) dt \\
& \equiv \lambda e^{-\lambda(t_2-a)} \int_0^{\infty} e^{-\lambda v} G_2(v) dv, \\
& \quad (G_2(v) \equiv F_2(v+t_2))
\end{aligned}$$

なる故、

$$\begin{aligned}
& \lambda^{-1} f_1(\lambda) f_2(\lambda) \\
& \equiv \lambda e^{-\lambda(t_1+t_2-a)} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-\lambda u} G_1(u) du \right\} \\
& \quad \left\{ \int_0^{\infty} e^{-\lambda v} G_2(v) dv \right\} \\
& \equiv \lambda \int_{t_1+t_2-a}^{\infty} e^{-\lambda(t-a)} \left\{ \int_0^{t-(t_1+t_2-a)} F_1(\tau+t_1) \right. \\
& \quad \left. F_2(t-\tau-t_1+a) d\tau \right\} dt \\
& \equiv L_c(\lambda, t)^{-1} \mathbf{I} \left(\begin{smallmatrix} t \\ t_1+t_2-a \end{smallmatrix} \right) \int_{t_1+t_2-a}^t F_1(\tau-t_2+a) \\
& \quad F_2(t-\tau+t_2) d\tau \\
& \equiv L_c(\lambda, t)^{-1} \mathbf{I} \left(\begin{smallmatrix} t \\ t_1+t_2-a \end{smallmatrix} \right) \int_{t_1}^{t-t_2+a} F_1(\tau) \\
& \quad F_2(t-\tau+a) d\tau
\end{aligned}$$

が得られる。従つてこれより直ちに (III. 5) 及び (III. 6) 式の兩關係が求められるのである。

更に、 $t_1=t_2=a$ ならば、

$$\mathbf{I} \left(\begin{smallmatrix} t \\ t_1+t_2-a \end{smallmatrix} \right) = \mathbf{I} \left(\begin{smallmatrix} t \\ a \end{smallmatrix} \right)$$

となるから

$$\begin{aligned}
p^{-1} f_1(p) f_2(p) \cdot 1 & \equiv p^{-1} f_1(p) F_2(t) \\
& \equiv p^{-1} f_2(p) F_1(t) \\
& \equiv \int_a^t F_1(\tau) F_2(t-\tau+a) d\tau
\end{aligned}$$

が得られる。最近林氏は、直接 Laplace 變換を用ひて全く同様の關係を導出してゐる⁽¹⁰⁾。

例。

$$\int_a^t \cdots \int_a^t F(t) (dt)^n \equiv \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} F(\tau) d\tau,$$

($n=1, 2, 3, \cdots$)

證明：

$$\text{左邊} \equiv p^{-1} p^{-(n-1)} F(t)$$

であるが

$$p^{-(n-1)} \cdot 1 \equiv \frac{1}{\Gamma(n)} (t-a)^{n-1}$$

なるにより、

$$p^{-1} p^{-(n-1)} F(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} F(\tau) d\tau$$

が求められる。尤も此の結果は又、第 I 篇の (IV. 9) 式を用ひ次の如くしても算出され得る。即ち

$$F(t) \equiv e^{at} H(t)$$

とおくときは、

$$\begin{aligned}
\text{左邊} & \equiv e^{-at} (p-a)^{-n} H(t) \\
& \equiv e^{-at} \frac{1}{\Gamma(n)} \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}} (p-a)^{-1} H(t). \\
& \equiv e^{-at} \frac{1}{\Gamma(n)} \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}} \int_a^t e^{a(t-\tau)} H(\tau) d\tau \\
& \equiv \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t e^{-a\tau} H(\tau) (t-\tau)^{n-1} d\tau \\
& \equiv \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} F(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

§§ III. 3. 2.

$$\begin{aligned}
& f_1(D) f_2(D) \mathbf{I} \left(\begin{smallmatrix} t \\ a \end{smallmatrix} \right) \\
& \equiv f_1(D) \mathbf{I} \left(\begin{smallmatrix} t \\ t_2 \end{smallmatrix} \right) F_2(t) \\
& \equiv f_2(D) \mathbf{I} \left(\begin{smallmatrix} t \\ t_1 \end{smallmatrix} \right) F_1(t) \\
& \equiv \mathbf{I} \left(\begin{smallmatrix} t \\ t_1+t_2-a \end{smallmatrix} \right) D \int_{t_1+t_2-a}^t F_1(\tau-t_2+a) \\
& \quad F_2(t-\tau+t_2) d\tau, \cdots \cdots \cdots (\text{III. 7}) \\
& \equiv \mathbf{I} \left(\begin{smallmatrix} t \\ t_1+t_2-a \end{smallmatrix} \right) D \int_{t_1}^{t-t_2+a} F_1(\tau) F_2(t-\tau+a) d\tau. \\
& \quad \cdots \cdots \cdots (\text{III. 8})
\end{aligned}$$

此の二つの關係は (III. 5) 式及び (III. 6) 式より、第 I 篇の (VI. 10) 式に (II. 34) 式を考慮して直ちに導かれるものである。而して若し、 $F_1'(t)$ 又は $F_2'(t)$ が存在するならば、

$$f_1(D)f_2(D)I\left(\frac{t}{a}\right) \\ \equiv I\left(\frac{t}{t_1+t_2-a}\right)\left\{F_1(t-t_2+a)F_2(t_2) \right. \\ \left. + \int_{t_1+t_2-a}^t F_1(\tau-t_2+a)F_2'(t-\tau+t_2)d\tau\right\}$$

又は

$$f_2(D)f_1(D)I\left(\frac{t}{a}\right) \\ \equiv I\left(\frac{t}{t_1+t_2-a}\right)\left\{F_1(t_1)F_2(t-t_1+a) \right. \\ \left. + \int_{t_1+t_2-a}^t F_1'(t-\tau+t_1)F_2(\tau-t_1+a)d\tau\right\}$$

とも書ける。

特に $t_1=t_2=a$ なる時は、

$$f_1(p)f_2(p) \cdot 1 \equiv f_1(p)F_2(t) \\ \equiv f_2(p)F_1(t) \\ \equiv D \int_a^t F_1(\tau)F_2(t-\tau+a)d\tau \\ \equiv D \int_a^t F_1(t-\tau+a)F_2(\tau)d\tau$$

となる。

更に又、 $t_1=t_2=a=0$ ならば従來の重疊定理 (又は Duhamel の定理⁽¹¹⁾)

$$f_1(p)f_2(p) \cdot 1 \equiv D \int_0^t F_1(\tau)F_2(t-\tau)d\tau \\ \equiv D \int_0^t F_1(t-\tau)F_2(\tau)d\tau$$

が得られる。よつて (III. 5) 式乃至 (III. 8) 式を擴張された重疊定理と呼ぶこととする。

§§ III. 3.3.

§§ III. 3.1 に於て

$$t_1=t_2=-\infty, \quad a=0$$

なる時は、

$$D^{-1}f_1(D)F_2(t) \equiv D^{-1}f_2(D)F_1(t) \\ \equiv \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\tau)F_2(t-\tau)d\tau \\ \equiv \int_{-\infty}^{\infty} F_1(t-\tau)F_2(\tau)d\tau \quad \dots\dots\dots(III. 9)$$

となる。

例。

$$D_x \cdot \equiv \frac{\partial}{\partial x} \cdot \text{とする時} \\ D_x \varepsilon^{tD_x^2} I\left(\frac{x}{0}\right) \cdot \equiv \sqrt{\frac{1}{4\pi t}} \varepsilon^{-\frac{x^2}{4t}}, \\ \left(\begin{array}{l} t>0, \\ -\infty < x < \infty \end{array}\right)$$

なる故、(この關係の算出に就ては附録 (II) を参照のこと) (III. 9) 式により

$$\varepsilon^{tD_x^2} E(x) \equiv \sqrt{\frac{1}{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} E(\xi) \varepsilon^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi$$

$$\equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(x+\sqrt{4t}\xi) \varepsilon^{-\xi^2} d\xi, \\ \left(\begin{array}{l} t>0, \\ -\infty < x < \infty \end{array}\right) \dots\dots\dots(III. 10)$$

が得られる。

§§ III. 3.4.

§§ III. 3.2 の結果より次の關係が導かれる。

$$f(D)I\left(\frac{t}{a}\right) \equiv I\left(\frac{t}{t_1}\right)F(t)$$

とすれば

$$D^{-1}f(D)I\left(\frac{t}{t_2}\right) \cdot \equiv I\left(\frac{t}{t_1+t_2-a}\right) \int_{t_1}^{t-t_2+a} \\ F(\tau)C\left(\frac{t-\tau+a}{t}\right) \cdot d\tau, \dots\dots\dots(III. 11)$$

$$f(D)I\left(\frac{t}{t_2}\right) \cdot \equiv I\left(\frac{t}{t_1+t_2-a}\right) D \int_{t_1}^{t-t_2+a} F(\tau) \\ C\left(\frac{t-\tau+a}{t}\right) \cdot d\tau, \dots\dots\dots(III. 12)$$

§§ III. 3.5.

§§ III. 3.4 に於て特に

$$t_1=t_2=-\infty, \quad a=0$$

なる時は

$$D^{-1}f(D) \cdot \equiv \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)C\left(\frac{t-\tau}{t}\right) \cdot d\tau \\ \dots\dots\dots(III. 13)$$

である。

例。

$$\varepsilon^{aD^2} \cdot \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^{-\tau^2} C\left(\frac{t+2\sqrt{\alpha}\tau}{t}\right) \cdot d\tau, \\ \left(\begin{array}{l} -\infty < t < \infty, \\ \alpha: \text{實常數} \end{array}\right) \dots\dots\dots(III. 14)$$

此の結果は $\alpha \geq 0$ ならば (III. 10) 式より明かであるが $\alpha < 0$ の場合は、 ε^{aD^2} が $L-M$ 條件を満足しないから (III. 13) 式よりこれを導くことは出来ない。併し解析接續の考へから (III. 14) 式が $\alpha < 0$ に對しても尙成立することを言ひ得るのである。而して $\alpha > 0$ なる時は更に

$$\varepsilon^{aD^2} \cdot \equiv \frac{1}{2\sqrt{\alpha\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^{-\frac{(t-\tau)^2}{4\alpha}} C\left(\frac{\tau}{t}\right) \cdot d\tau, \\ (\alpha > 0) \dots\dots\dots(III. 15)$$

が得られ、 $\alpha < 0$ なる時は

$$\varepsilon^{aD^2} \cdot \equiv \frac{1}{2\sqrt{\alpha\pi}} \int_{t-j\infty}^{t+j\infty} \varepsilon^{-\frac{(t-\tau)^2}{4\alpha}} C\left(\frac{\tau}{t}\right) \cdot d\tau, \\ (\alpha < 0) \dots\dots\dots(III. 16)$$

なる關係が導かれるのである。又容易に

$$\varepsilon^{-aD^2} \varepsilon^{aD^2} \cdot \equiv \varepsilon^{aD^2} \varepsilon^{-aD^2} \cdot \equiv 1 \cdot$$

なることを檢證し得る。(附録 (III) を参照のこと)

§ III. 4.

$$p^s \cdot 1 \equiv \frac{1}{\Gamma(1-s)} (t-a)^{-s}, \quad (s < 1). \\ \dots\dots\dots(III. 17)$$

證明：

$$L_c(\lambda, t)^{-1} I\left(\frac{t}{a}\right) (t-a)^{-s}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda \int_a^\infty e^{-\lambda(t-a)} (t-a)^{-s} dt \\
&= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} \tau^{-s} d\tau \\
&= \lambda^s \Gamma(1-s), \quad (s < 1)
\end{aligned}$$

なる故、

$$\begin{aligned}
D^s I\left(\frac{t}{a}\right) &= I\left(\frac{t}{a}\right) p^s \cdot 1 \\
&= I\left(\frac{t}{a}\right) \frac{1}{\Gamma(1-s)} (t-a)^{-s}, \quad (s < 1)
\end{aligned}$$

となり、従つて (III. 17) 式が得られる。

§ III. 5. $f(\lambda)$ が $\lambda = \infty$ を中心として

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^{-n}$$

の如く展開される時は、

$$f(p) \cdot 1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^{-n} \cdot 1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(t-a)^n}{n!} \dots\dots\dots (III. 18)$$

である。

逆に、函数 $F(t)$ が

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (t-a)^n$$

の如く冪級数に展開され得る時は

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n n! p^{-n} \cdot 1$$

と書ける故、若し更に

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n n! x^n$$

の如き展開をなし得る既知函数 $f(x)$ が存在するならば

$$F(t) = f(p^{-1}) \cdot 1 \dots\dots\dots (III. 19)$$

の如くなる。

例 1.

$$\begin{aligned}
\left(\cos \frac{1}{p}\right) \cdot 1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2n)!} p^{-2n} \cdot 1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{(t-a)^{2n}}{\{(2n)!\}^2} \\
&= \text{ber}(2\sqrt{t-a}).
\end{aligned}$$

例 2.

$$\begin{aligned}
\left\{p \log\left(1 + \frac{1}{p}\right)\right\} \cdot 1 &= p \sum_{n=1}^{\infty} (-)^{n-1} \frac{p^{-n}}{n} \cdot 1 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-)^{n-1} \frac{(t-a)^{n-1}}{n!} \\
&= \frac{1 - e^{-(t-a)}}{t-a}.
\end{aligned}$$

尚、附録 (VI) に挙げた公式中、(6)~(27) の諸関係は何れも此の種のものである。

§ III. 6. $f(\lambda)$ が

$$f(\lambda) = \varphi(\lambda) + \psi(\lambda)\lambda^s, \quad \left(\begin{array}{l} s < 1, \text{又 } \varphi(\lambda) \text{ 及び } \psi(\lambda) \\ \text{は } \lambda \text{ の有理函数とする} \end{array} \right)$$

の如く書ける時は、

$$f(p) \cdot 1 = \varphi(p) \cdot 1 + \frac{1}{\Gamma(1-s)} \psi(p) (t-a)^{-s}, \quad (s < 1) \dots\dots\dots (III. 20)$$

となる。

例.

$$\begin{aligned}
\frac{p}{\sqrt{p+1}} \cdot 1 &= \frac{p(\sqrt{p-1})}{p-1} \cdot 1 \\
&= -\frac{p}{p-1} \cdot 1 + \frac{p}{p-1} \sqrt{p} \cdot 1 \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi(t-a)}} \\
&\quad + e^{(t-a)} \left(\int_a^t \frac{e^{-(t-a)}}{\sqrt{\pi(t-a)}} dt - 1 \right).
\end{aligned}$$

§ III. 7. $f(\lambda)$ が Mittag-Leffler の定理⁽¹²⁾ に従ひ、有理分數表示

$$f(\lambda) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{1}{\lambda - \alpha_n} + \frac{1}{\alpha_n} \right) \dots\dots\dots (III. 21)$$

にて表はされる時は、

$$\begin{aligned}
f(p) \cdot 1 &= f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(e^{\alpha_n t} p^{-1} e^{-\alpha_n t} + \frac{1}{\alpha_n} \right) \\
&= f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\alpha_n} e^{\alpha_n(t-a)} \dots\dots\dots (III. 22)
\end{aligned}$$

但し、 α_n は $f(\lambda)$ の一位の極で

$$0 \leq |\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \infty$$

であり、 A_n は極 α_n に於ける留数とする。此の結果を

$$f(p) \cdot 1 = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (\lambda - \alpha_n) f(\lambda) \right\}_{\lambda = \alpha_n} \frac{e^{\alpha_n(t-a)}}{\alpha_n}$$

とも書くことが出来るが、これは第 I 篇の (IV. 23) 式の Heaviside の展開定理の一擴張に當つてゐるわけである。

例 1.

$$\frac{\sinh \lambda(\pi - x)}{\sinh \lambda \pi} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin nx}{\lambda^2 + n^2}, \quad (0 < x < 2\pi)$$

なる故、

$$\begin{aligned}
\frac{\sinh p(\pi - x)}{\sinh p \pi} \cdot 1 &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin nx}{p^2 + n^2} \cdot 1 \\
&= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx \sin^2 \frac{n(t-a)}{2} \\
&\quad (0 < x < 2\pi).
\end{aligned}$$

例 2.

$$\tanh \lambda \pi \equiv \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda^2 + \left(\frac{2n-1}{2}\right)^2}$$

なるにより、

$$\begin{aligned} (\tanh p\pi) \cdot 1 &\equiv \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p}{p^2 + \left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} \cdot 1 \\ &\equiv \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \frac{2n-1}{2} (t-a), \\ &\quad (-\infty < t < \infty) \\ &= -1, \quad (2\pi < t-a < 4\pi) \\ &= +1, \quad (0 < t-a < 2\pi). \end{aligned}$$

§ III. 8. $t=a$ に於て積分可能ならざる函数の演算子表示

第 II 章に於て、有限なすべての t の値に對して積分可能な解析函数の p -表示を得る方法を説明したが、たとへば $t=a$ に於て積分可能ならざる函数に就てはかかる表示は求められない。併し斯様な函数の内

$$F(t) \equiv g(D) f(p) \cdot 1 \quad \dots\dots\dots (\text{III. 23})$$

なる形に表現され得る函数の存在することは容易にわかる。たとへば

$$(t-a)^{-\frac{3}{2}} \equiv -2\sqrt{\pi} D \sqrt{p} \cdot 1$$

の如きである。かかる場合吾々は、(III. 23) 式の右邊を函数 $F(t)$ の演算子表示と名付けよう。然らば p -表示は $g(D) \cdot 1$ なる特別の場合に當ることとなる。 $F(t)$ の演算子表示をかくの如く考へるならば、從來の Heaviside 法に於て次の如き不都合ありとなす非難⁽¹³⁾は消滅するのである。

從來の Heaviside 法:

$$(t-a)^{-\frac{3}{2}} \equiv -2\sqrt{\pi} \sqrt{p} \cdot 1$$

であるから、此の式の兩邊に $p^{-1} \equiv \int_a^t \cdot dt$ を作用せしめれば、

$$\text{左邊} \equiv \int_a^t (t-a)^{-\frac{3}{2}} dt \text{ は發散して存在せず、}$$

$$\text{右邊} \equiv -2\sqrt{\pi} \sqrt{p} \cdot 1 \equiv -2 (t-a)^{-\frac{1}{2}}$$

となり、左邊からは $-2(t-a)^{-\frac{1}{2}}$ は出て來ない。

修正された演算子算法:

$$(t-a)^{-\frac{3}{2}} \equiv -2 D \sqrt{p} \cdot 1$$

であるから、此の式の兩邊に $D^{-1} \equiv \int_a^t \cdot dt$ を作用せしめれば、

$$\text{左邊} \equiv D^{-1} (t-a)^{-\frac{3}{2}} \equiv -2 (t-a)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\text{右邊} \equiv -2 \sqrt{\pi} \sqrt{p} \cdot 1 \equiv -2 (t-a)^{-\frac{1}{2}}$$

となり、當然乍ら正當な結果を得る。以上の一例から直ちに看取されることは、上述の如き非難の出現した原因が全く第 I 篇に於て詳論した如く、 D と p とを同一視してゐることにあることである。

例.

$$L(\lambda) \equiv \lambda \int_a^{\infty} e^{\lambda(t-a)} \log(t-a) dt$$

に於て $\lambda(t-a) = \tau$ とおけば

$$\begin{aligned} L(\lambda) &\equiv \int_0^{\infty} e^{-\tau} (\log \tau - \log \lambda) d\tau \\ &\equiv L(1) - \log \lambda \end{aligned}$$

であるが、

$$\Gamma(\lambda) \equiv \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^{\lambda-1} d\tau, \quad (R(\lambda) > 0)$$

なる故

$$\Gamma'(\lambda) \equiv \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^{\lambda-1} \log \tau d\tau, \quad (R(\lambda) \geq 1)$$

となる。よつて

$$\Gamma'(1) \equiv L(1) = -\gamma, \quad (\gamma: \text{Euler の常數})$$

が得られるから

$$L(\lambda) \equiv -\gamma - \log \lambda,$$

或は

$$\log(t-a) \equiv L(p) \cdot 1 \equiv -\gamma - (\log p) \cdot 1 \quad \dots\dots\dots (\text{III. 24})$$

となる。よつて

$$(t-a)^{-1} \equiv -D (\log p + \gamma) \cdot 1,$$

$$(t-a)^{-2} \equiv D^2 (\log p + \gamma) \cdot 1,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$(t-a)^{-n} \equiv (-)^n \frac{1}{\Gamma(n)} D^n (\log p + \gamma) \cdot 1 \quad \dots\dots\dots (\text{III. 25})$$

となるから、 $(t-a)^{-n}$, ($n=1, 2, 3, \dots$) の演算子表示は

$$(-)^n \frac{1}{\Gamma(n)} D^n (\log p + \gamma) \cdot 1$$

と云ふことになる。[$(-)^n \frac{1}{\Gamma(n)} D^n (\log p) \cdot 1$ では
ないことに注意を要する。]

[参考文献は次頁]

文

- (1) 岡村 進: 電學誌 62, 149 (昭 17).
- (2) K. W. Wagner: Operatoreurechnung (1940).
- (3) 櫻井時夫: 電學誌 61, 515, 517 (昭 16),
電學論 2, 360, 364 (昭 16).
- (4) G. Doetsch: Laplace-Transformatim (1937).
- (5) 岡村 進: 電學誌 61, 469 (昭 16),
櫻井時夫: " " 470 (").
- (6) 菅野正雄: 電學誌 62, 171 (昭 17),
電學論 3, 111 ("),
20回聯大豫稿 No. 18 (昭 17-4) 等.

献

- (7) 藤原松三郎: 常微分方程式論 220 (昭 15).
- (8) Courant und Hilbert: Methoden der Wath. Phys.,
I. 87 (1931); II. 20 (21937).
- (9) 竹内端三: 函數論, 上卷 193 (昭 2).
- (10) 林 重憲: 電學誌 62, 505 (昭 17),
電學論 3, 375 (昭 17).
- (11) 永宮健夫: 微分方程式論(應用數學第II卷)179(昭 16)
Carslaw: The Conduction of Heat, 17 (1921).
- (12) 寺澤寛一: 數學概論, 175 (昭 6).
- (13) 櫻井時夫: 電學誌 61, 195 (昭 16).

放 電 管 制 御 装 置

(三菱特許 第 154881 號)

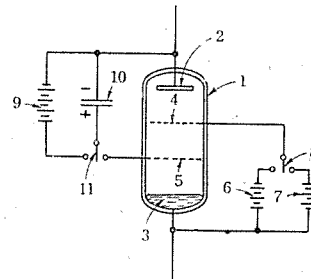
水銀蒸氣、或は他の瓦斯を含む放電管の、放電開始の時刻は、制御格子に依り任意に制御し得るも、格子制御に依りて電弧を消滅せしめ、放電々流を停止せしむる事は、極めて小電流に非ざれば不可能である。

即ち、一般に、制御格子に極めて高き負電壓を印加し、格子の周圍に充分なる厚味を有する「イオン」鞘を形成せしめて、電子の格子面通過を阻止し、以て放電を停止せしむるものなるが故に、放電々流極めて小なるに非ざれば、「イオン」密度高きため、必要なる厚味を有する「イオン」鞘を形成せしむること至難にして事實上數「アンペア」程度の電流を遮斷する事は不可能である。

本發明は、放電管(1)の制御格子(4)と、陰極(3)との間に、補助電極(5)を設け、起動に際しては從來の如く、開閉器(8)を右方に投じて制御格子に正電位を印加し起動せしむるが、放電を停止せしむる場合は、開閉器(8)を左方に投じて制御格子に負電壓を印加せしめ、次に電源(9)により豫め圖示の如き極性に充電せられ、負極を陽極(2)に接続せる蓄電器(10)の陽極側を、開閉器

(11)を右方に投じて補助電極(5)に接続すれば、陽極(2)より補助電極(5)は蓄電器(10)の充電々壓丈け正電位となるを以て、陽極(2)と陰極(3)間の放電々弧は補助電極(5)と陰極(3)間の放電々弧と變し、蓄電器(10)の電荷を放電する故、陽極(2)と補助電極(5)間の放電々弧は消滅する。

而して、陽極(2)と陰極(3)間の放電々弧が補助電極(5)と陰極(3)の放電々弧に變化し、蓄電器(10)の電荷を放電する瞬間に、制御格子(4)の附近の「イオン」は陽極2又は補助電極(5)に吸引せられて、「イオン」密度は稀薄となるを以て、制御格子(4)上の陽「イオン」鞘は厚味を著増し、蓄電器(10)の電荷放電後補助電極(5)と陰極(3)間の放電々弧が消滅し、再び電子が陽極(2)に向ふを反撥阻止して消弧するもので、簡單、確實に大電流を遮斷し得るものである。(菅野)



論文と講演

寄稿

正 木 良 一	精密機械工業と戦時規格	工 業 國 策	7 月 號
薄 井 廉 介	並行線型發振器負荷結合法の解析	電 學 誌	8 月 號
木 村 久 男	内鐵型變壓器に於ける異常渦流損	電 學 誌	
木 村 久 男	衝擊波形直視裝置に於ける波形分析に就て	電 氣 號	8 月 號
荒 井 潔	交流式輕合金抵抗熔接機の取扱に就て	電 氣 公 論	8 月 號
井 上 八 郎	氣中遮斷器の溫度上昇限度	製 協 誌	9 月 號
龜 井 昊	最近の無軌道電車と其の電氣機器	製 協 誌	9 月 號
宗 村 平	金屬壓延に於ける電氣制御	電 氣 工 學	

第 19 卷 第 10 號 内 容 豫 定

最近の工作機械に就て
スプライン・ホウの設計
キザ仕上面の一研究
工作機械用電機品
多軸ボール盤と其の應用
ボール盤の荷重試験及試験裝置
ミシン發達史 (3)
KD-V₂型 深孔ボール盤

「工作機械と電機品」特 輯

牛 田 健 雄
岩 田 弘 之
武 井 文 二 郎
林 勝 幸
鈴 木 修
野 口 弘 一
伊 東 璋
鈴 木 修 一
野 口 弘 一

編 輯 室

伊太利終に降伏す。必勝の信念なく闘志無き彼等再び裏切の汚點を歴史に印す。その行爲誠に唾棄すべしと雖も、資源無く生産力なき國の末路哀れむべき點なきにしもあらず。生産力増強の急務たること此の例に鑑みても明々白々。

戦局は益々苛烈化す。我國生産陣の一翼として吾人の責務今より大なるは無し、奮はざるべからず、勵まざるべからず。

任務は神聖なり。責任は極めて重し、一業一務忽

せにせず心魂を傾注して一切の心段を盡し、これが達成に遺憾なきを期すべし。(戦陣訓)

先月は鑛山技術者用 ハンドブック とも云ふべき鑛山増強特輯號を發行して、江湖の絶讃を拍した。今後再々この種の企劃に努力を傾けたいと思ふ。

菅野技師のヘビサイド演算子法、回を重ねること既に9回益々御愛讀を乞ふ。ミシン發達史も第2回目、機械の完成の陰にひそむ技術者の血のにじむ苦心、回を追つて展開される。燈火親しむべき候好個の讀物として御推薦申上ぐ。

(Y)

三菱電機株式會社

東京都澁町區丸ノ内二丁目四

神戸製作所
名古屋製作所
長崎製作所
大阪製作所
大船工場
世田ヶ谷工場

神戸都兵庫區和田崎町三丁目
名古屋市東區矢田町
長崎市平戸小屋町
兵庫縣川邊郡立花村塚口
神奈川縣鎌倉郡大船町
東京都世田ヶ谷區池尻町四三七

東京工場
直方出張所
札幌出張所
奉天駐在員
新京駐在員
京城駐在員

東京都芝區海岸通二丁目七
直方市大字下新入
札幌市北二條東一二丁目九八
奉天大和區浪速通二八
新京大同大街(康德會館内)
京城府黄金町一丁目一八〇

編輯兼發行者 中 台 一 男
發行所 三菱電機株式會社 神戸製作所内
「三菱電機」編輯部
印刷者 久 保 專 治
印刷所 株式會社 日本寫真工藝社

〔無斷轉載を禁ず〕
配給元 日本出版配給株式會社
昭和18年9月24日 印刷納本
昭和18年9月30日 發行
〔本誌代價〕 ㊦ 壹部=付 金貳拾錢
日本出版文化協會 會員番號 第132506號