



# 三菱電機

第 18 卷

昭和 17 年 7 月

第 7 號

## 内 容 目 次

衝流式遠隔測定裝置の應用.....	209
Heaviside 演算子法に對する新しい考察と その電氣回路解析に於ける應用 (IV) .....	213
電動操作油入遮斷器投入時間.....	223
最近の小型電動機用開閉器.....	227
整流子機嵌環初應力の計算に關する一考察.....	230

# 三菱電機株式會社



# 三菱電機

第十八卷

昭和十七年七月

第七號

## 衝流式遠隔測定裝置の應用

神戸製作所 門 頼 雄

### 内 容 梗 概

最近電力系統の種々な電氣的及機械的量の遠隔測定が重要な問題となり、特に通信線、高壓送電線を利用する搬送式遠隔測定裝置の完成は焦眉の急を要する問題となつてゐるが、本稿には之等に使用するに適する衝流式遠隔測定裝置に就て略述し、且本裝置を應用して電力系統の電力、無効電力、電流、電壓、ボルトアンペア、力率、周波數、其の他發電所水槽の水位等を遠隔測定する場合の裝置に就て略述したものである。

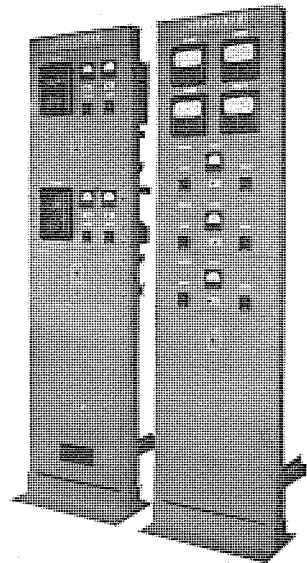
### 1 緒 言

電力系統の合理的運営をなす爲め多數の發電所、變電所等を中央配給所から制御する場合、之等の發、變電所等の時々刻々の電力、電流、電壓、或は特殊の場合には無効電力、ボルトアンペア、力率、周波數、發電所水槽の水位等を、配給所に指示又は記録せしめることが必要である。この目的に使用せられる遠隔測定裝置としては種々の方式のものがあるが、計測量に比例する電氣的衝流を傳送し、受量所に於て之を測定する所謂衝流式遠隔測定裝置は、(イ) 其の構造が簡單なこと、(ロ) 傳送回路のインピーダンスの變化その他の影響を受けることが少いこと、(ハ) 容易に搬送式遠隔測定裝置として使用することが出來、送電線通信線等を利用して長距離傳送をなし得ること等の特徴があつて、最も廣く使用せられる可能性がある。

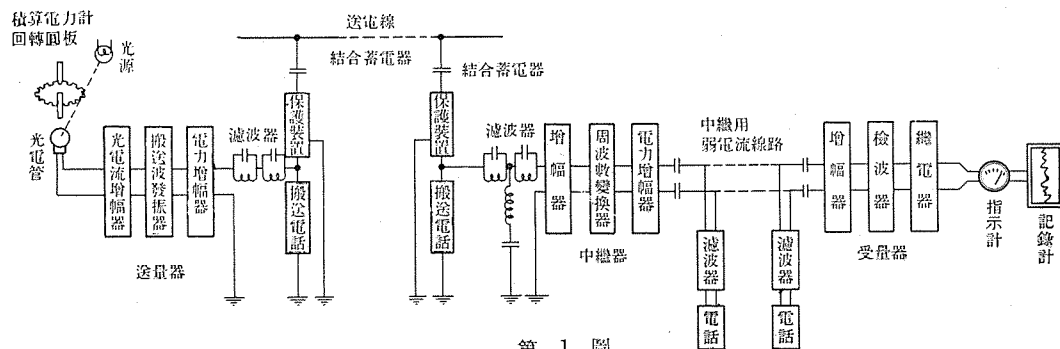
第1圖及第2圖は本方式による搬送式遠隔測定裝置の一例を示すもので下記の主要部から成る。

イ、衝流發信器

ロ、搬送波發振裝置  
ハ、搬送波結合裝置



第 2 圖



第 1 圖



御ばねの回轉力  $\tau_A$  をして豫め測定すべき電力が零の場合  $W_0$  の電力に相當する機械力を與へて置き

$$\tau_A = k_1 W_0 + k_1 (W_1 + W_2 + W_3 + \dots)$$

の關係を保たせると、衝流發信器に加はる電力も

$$W_k = KW_0 + K(W_1 + W_2 + W_3 + \dots)$$

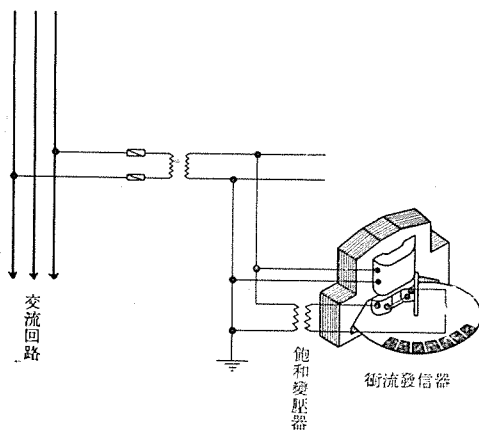
となる。従つて連絡線電力が零なる場合  $W_0$  に相當する衝流を送り、連絡線電力が正方向に増加する場合は送出する衝流數を増大し、之が逆方向に増加する場合は送出する衝流數を減少し、結局正方向電力 ( $W_1 + W_2 + W_3 + \dots$ ) 及逆方向電力 ( $-W_0$ ) の範圍内の電力を連續的に測定することが出来る。

### 3 無効電力の遠隔測定

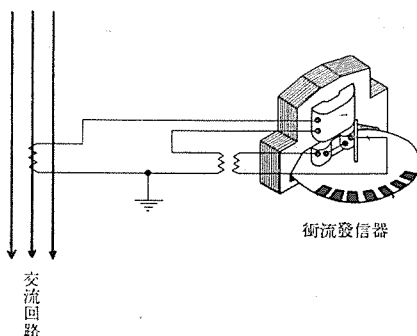
無効電力の遠隔測定に使用する衝流發信器は電力の遠隔測定に使用する衝流發信器と全く同じものであるが、之に加へる電壓の位相を  $90^\circ$  變移せしめる必要がある故、電壓移相器を外附する。多數の回路の總合無効電力を遠隔測定する場合も前述の總合電力の遠隔測定と同様の装置によつて之を行ふことが出来る。

### 4 交流電壓、交流電流の遠隔測定

交流電壓、交流電流を遠隔測定する場合は積算電力計型衝流發信器の回轉圓板をして夫々回路の電壓、電流に略々比例して回轉せしめるもので第4圖及第5圖は此の裝置を示す。圖に於て衝流發信器の上下兩線輪共に夫々測定すべき回路の電壓或は電流を加へ、之等の一方の線輪の回路には飽和變流器を挿入し、略々回路の電壓或は



第 4 圖



第 5 圖

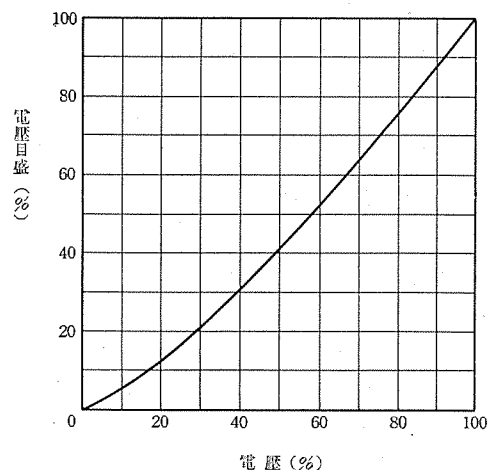
電流に比例して發信器の圓板を回轉せしめることが出来る。

第6圖は本装置による電壓計の目盛と電壓値との關係を示してゐる。

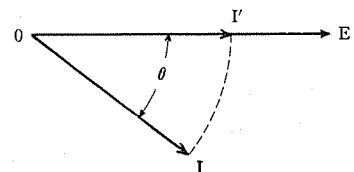
猶交流電壓、交流電流の遠隔測定に際し、之等交流電氣量を適當な整流器によつて整流して夫々直流電壓、直流電流とし、後述の直流遠隔測定装置によつて遠隔指示或は記録する事も出来る。此の場合は直流遠隔測定の場合と同様に均一目盛の受量計器となし得る特徴がある。

### 5 交流 ボルトアンペア の遠隔測定

近時資材節約其の他の見地から送配電線の利用を向上することが問題視せられ、電力授受と同様に ボルトアンペア 授受を重要視せられる傾向がある。従つて發、變電所の時々刻々の ボルトアンペア と電力とを同時に給電所に於て測定し、之を基準として系統の高能率運轉をする必要が起つて来る。本装置は上述の要求に適するもので、其の原理は第7圖に示す様に電壓  $E$  と電流  $I$  とが相差角  $\theta$  を有する場合、電流  $I$  の位相角の如何に拘らず、之と一定の比を有し且電壓  $E$  と常に同相の電流  $I'$  を再生せしめ、之等電壓、電流を積算電力計型衝流發信器に加へて測定回路の ボルトアンペア に比例する衝流を發生せしめるものである。第8圖は單相回路の ボルトアンペア を測定する場合の原理を説明するための接續圖を示し、二つの電流衡  $A$  と  $B$  との可動部を機械的に連結して成る差動電流衡と之が接點によつて制御せられる操作電動機及可變抵抗と上述と同様の積算電力計型衝流發信器とから成り、衝流發信器の電壓線輪は測定すべき回路の電壓によつて直接附勢せられ、其の電流線輪は差動電流衡の一方



第 6 圖



第 7 圖





## 6 交流位相角の遠隔測定

前項ポリアンペアの遠隔測定の項に述べたと同様の要求によつて、発電所の刻々の力率を遠隔測定する必要がある。又場合によつては遠隔発電所の発電機の同期状態を検出する爲め、位相角を遠隔測定することも屢々必要となつて来る。第 10 圖は之等の目的に使用する位相角の遠隔測定装置を示し、圖は一例として、三相回路の力率の遠隔測定装置を示してゐる。本装置は電流衡型力率計と、回路力率が變化した場合之に加はる電壓、電流の力率を常に一定値に補償すべき力率補償装置とを備へ、力率の補償度に比例して積算電力計型衝流発信器を制御し、之に依つて發生する電氣的衝流をして補償力率従つて回路力率に比例せしめるものである。即ち第 10 圖及第 11 圖に於て回路の力率角が零より  $\theta$  に變化すれば、電流  $I_1, I_2, I_3$  は夫に  $I_1', I_2', I_3'$  となり、電流衡型力率計の接點  $I_1$  を閉じて操作電動機 No. 1 を操作し、力率計電壓回路の可變抵抗のタップ  $p$  を  $p'$  に移動し、力率計の電壓線輪に加はる電壓位相を變化する。操作電動機 No. 1 は斯くして電流衡型力率計が平衡を取戻すまで之を續け、同時に齒車  $G_1, G_2$  を經て電流衡  $B$  の制御ばねの調整を變化する。電流衡  $B$  の調整を變化すれば接點  $I_2$  を閉じて操作電動機 No. 2 を操作し、電流衡  $B$  に加はる電力を變化して其の平衡を取戻すまで續ける。電流衡  $B$  に加へられる電力と積算電力計型衝流発信器に加へられる電力とは前述と同様に一定關係を有する故、結局衝流発信器の發生する衝流数は回路の力率角と一定關係を有することゝなる。

## 7 周波数の遠隔測定

商用周波数を遠隔測定する場合は交流周波数を其の儘衝流に變形して送量し、受量所に於てはこの衝流と同じ

周波数の正弦波交流電壓を再生して任意の周波計で遠隔測定することも出来るが、次に繼電器型計器を利用する衝流発信器に就て略述する。本装置は繼電器型精密周波計と、其の電氣回路のインピーダンスを補償し、精密周波計をして常に定位置を指示せしめる補償装置と、インピーダンスの補償度に比例して衝流を發生せしめる衝流発信器を使用す。第 12 圖に於て測定回路の周波数が變化すれば、周波計は接點  $r_1$  或は  $I_1$  を閉じて電動機 No. 1 を操作し周波計回路の直列静電容量の値を變化して周波計の指度を補償し、同時に齒車  $G_1, G_2$  を經て電流衡  $B$  の制御ばねの調整を變化する。電流衡  $B$  の調整を變化すれば接點  $r_2$  或は  $I_2$  を閉じて操作電動機 No. 2 を操作し、電流衡  $B$  に加はる電力を變化して其の平衡を取戻すまで續ける。電流衡  $B$  に加へられる電力と積算電力計型発信器に加へられる電力とは前述と同様に一定關係を有する故、交叉線輪型周波計の兩線回路の電流を夫々  $i_c$  及  $i_l$  とし、回路電壓を  $E$ 、周波数を  $f$ 、周波計の兩線輪回路の静電容量及自己誘導を  $C$  及  $L$  とし、 $k_1, k_2$  を常數とすれば、周波計の平衡状態に於ては、

$$\frac{i_c}{i_l} = \frac{2\pi f C E}{E} = (2\pi f)^2 C L = k_1$$

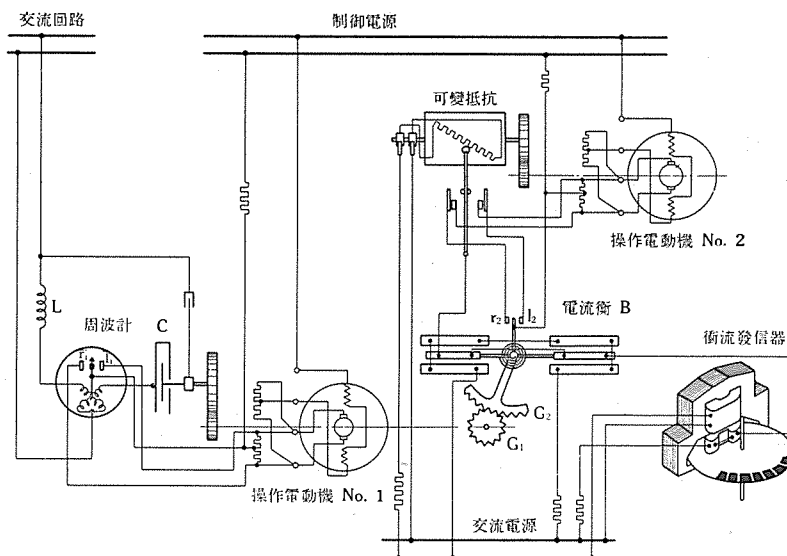
なる故

$$f = \frac{k_2}{\sqrt{C}}$$

となる。然るに静電容量値を變化すべき變移角度を  $\theta$ 、電流衡  $B$  の制御ばねの回轉力を  $\tau$ 、電流衡  $B$  及衝流発信器に加へられる電力を  $W_B$  及  $W_h$  とし、 $k_3, k_4, k_5, k_6$  及  $K$  を常數とし、

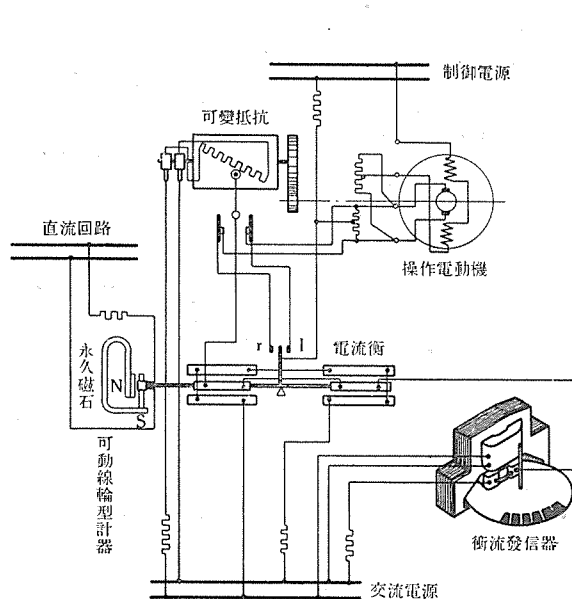
$$C = \frac{k_3}{\theta^2}$$

の關係を與ふれば、



第 12 圖





第 13 圖

$$\theta = k_A \tau = k_B W_B = k_C W_h$$

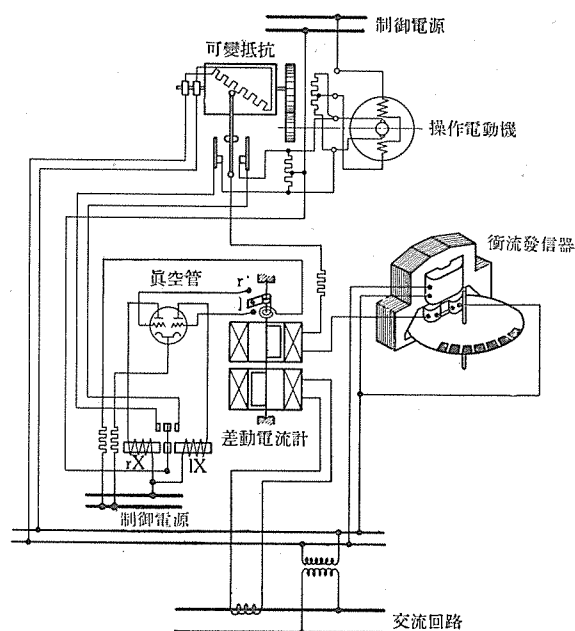
なる故、結局

$$f = \frac{k_2}{\sqrt{C}} = KW_h$$

となつて回路周波数と衡流發信器に加はる電力、從つて之から發する衡流数との間には一定の關係が存立することが判明し、衡流数を測定することによつて間接に周波数を測定することが出来る。

## 8 直流電壓、直流電流の遠隔測定

直流電壓、直流電流等を遠隔測定することの要求は比較的稀であるが、一つの電氣所で多數の回路の電力、電流等を總合し之に比例する直流電流を得て、更に之を遠隔地に搬送して測定する様な場合に直流の遠隔測定装置を必要とする。第 13 圖は此の要求に適する衡流發信装置を示し測定すべき直流電流を可動線輪型計器の素子に通じ、之による機械力と交流電流衡による機械力とを常に平衡せしめ、且交流電流衡に加る電力と一定比率の電力を積算電力計型衡流發信器に加へる様にしたものである。從つて本装置に於て可動線輪型計器に流れる直流電流が變化すれば、平衡桿の接點  $l$  或は  $r$  を閉ち交流電流衡の機械力をして直流電流による可線輪型計器の機械力と常に平衡せしめる様電動機及可變抵抗を操作する。積算電力計型衡流發信には前述の装置と同様に交流電流



第 14 圖

衡に加はる電力と一定比率の電力を加へて回轉圓板を回轉する故、結局本装置に加はる直流電壓或は電流に比例する衡流を發生送出することとなる。

## 9 水位其の他の機械的位置の遠隔測定

發電所の貯水池或は水槽の水位其の他の機械的量を遠隔測定する場合は之等の變化に比例して積算電力計型衡流發信器の圓板を回轉せしめる必要がある。第 14 圖は水位の遠隔測定に使用する衡流發信器を示す。本装置に於ては浮子の上下移動に應じて電流衡の制御ばねの回轉力を變化する装置と、此の制御ばねの回轉力と電流衡に生ずる機械力とを常に平衡せしめる様、前述と同様の操作電動機、可變抵抗及積算電力計型衡流發信器を備へ、電流衡の制御ばねの回轉力の變化即ち水位の變化に應じて、衡流發信器に加へる電力を變化し、結局水位の變化に比例する電氣的衡流を發生送出するものである。水位以外の機械的量の遠隔測定の場合も本装置と略々同様の装置によつて遠隔測定することが出来る。

## 10 結 言

以上衡流式遠隔測定装置を種々な電氣的及機械的量の遠隔測定に應用する場合に就て略述し、比較的簡単な装置によつて、現在一般に要求せられてゐる電氣的、機械的諸量を電氣的衡流に變化して遠隔測定し得ることを示したので、之等装置の試験成績並に實地試用の結果に就ては何れ稿を改めて報告したいと思ふ。

# Heaviside 演算子法に對する新しい考察と その電氣回路解析に於ける應用 (IV)

研 究 部 菅 野 正 雄

## 内 容 梗 概

前號迄に説明したる演算子法を利用して、線型一次常微分方程式及び常係數線型常微分方程式の演算子解を求むる方法を示し、電氣回路解析に對する演算子解法を得る準備とした。

## 前 號 迄 の 梗 概

從來の Heaviside 演算子法の根本缺陷は、 $p^{-1} \equiv \int_0^t \cdot dt$  の逆演算子としての  $p$  を、 $p \equiv \frac{d}{dt} \cdot$  としてゐることにあり、その正しい表現は、 $p \equiv \frac{d}{dt} \cdot + pC\left(\frac{a}{t}\right) \cdot$  なるべきことを指摘し、然る後、 $p$  及び  $p^{-1}$  に關する種々の演算子法を説明した。而して、これによつて所謂  $p$  の代數化の意味を明瞭ならしめた。

## (V) 微分方程式の一般解を求むる 記號的方法

### § V.1. 緒 言

§ I.3. に於て簡単に述べた如く、電氣回路解析の問題は結局、微分方程式の解法に歸せられるのであるが、第 III 章及び第 IV 章に於て説明せる諸關係を利用することにより、かゝる解法を極めて手際よく且つ機械的に取扱へることとなるのである。かくの如き取扱ひを微分方程式の記號的解法（又は演算子解法）と呼ぶこととする。文献（5）に於ける説明の如く、從來の記號的解法と稱せらるるものは、(I.2) 式の特解を求むることにあつたのであるが、本章に於て説明する所のものは、その一般解を求むる記號的方法であつて、兩者の間には著しい相違があるのである。

### § V.2. 線型一次微分方程式

$$(D+F(t))y=G(t), \dots\dots\dots (V.1)$$

#### の記號的解法

かゝる微分方程式に對する記號的解法は從來試みられた例がなく、又所謂 Laplace 變換法の直接の適用も不可能な問題の一つである。

解：  $a$  を任意の適當な實常數として、(II.31) 式の關係

$$D \equiv p \cdot - pC\left(\frac{a}{t}\right) \cdot$$

を用ひ、(V.1) 式を書き換えれば、

$$\begin{aligned} (p+F(t))y &= G(t) + pC\left(\frac{a}{t}\right)y \\ &= G(t) + py_a \end{aligned}$$

が得られる。よつて、この式の兩邊に  $(p+F(t))^{-1}$  を作用せしめ、(IV.3) 及び (IV.17) 式なる關係を利用すれば、

$$\begin{aligned} y &= (p+F(t))^{-1}G(t) + (p+F(t))^{-1}py_a \\ &= \varepsilon^{-\int_a^t F(t)dt} \int_a^t \varepsilon^{\int_a^t F(t)dt} G(t)dt \\ &\quad + y_a \varepsilon^{-\int_a^t F(t)dt}, \dots\dots\dots (V.2) \end{aligned}$$

$$= \varepsilon^{-\int_a^t F(t)dt} \left\{ \int_a^t \varepsilon^{\int_a^t F(t)dt} G(t)dt + A \right\}, \dots\dots (V.3)$$

を得る。こゝに

$$A \equiv y_a \varepsilon^{\int_a^t F(t)dt} - \int_a^t \varepsilon^{\int_a^t F(t)dt} G(t)dt$$

であるが、 $a$  が任意の常數であり、 $y_a$  も亦任意に與へられたと考へれば、結局  $A$  も亦、任意の常數と考へて差支へない故、(V.3) 式は (V.1) 式の不定積分解（一般解）を與へることとなる。もし最初に、境界條件として  $t=a$  に於て  $y=y_a$  の如く與へてあつたとすれば、その解は (V.2) 式により示さることとなるのである。

これをもし、從來の記號的方法によつて解かんとすれば、

$$(D+F(t))y=0$$

の一般解

$$y_1 = A \varepsilon^{-\int_a^t F(t)dt}, (A: \text{任意の常數})$$

と、(V.1) 式の特解、

$$y_2 = (D+F(t))^{-1}G(t)$$



$$= \varepsilon^{-\int^t F(t) dt} \int^t \varepsilon^{\int^t F(t) dt} G(t) dt$$

〔(III.2) 式を参照のこと〕

とを求め、然る後

$$y = y_1 + y_2, \dots \dots \dots (V.4)$$

として一般解を與へてゐるのであるが、更に  $t=a$  に於て  $y=y_a$  なる条件がある時は、これを (V.4) 式に代入して  $A$  を決定し、結局 (V.2) 式を得るといふことになるのである。兩者を比較する時、その何れが便利なるかは自づから明かであらう。

### § V.3. 常係数線型常微分方程式の記號的解法

#### §§ V.3.1. 微分方程式が

$$f(D)y = F(t), \dots \dots \dots (V.5)$$

の如く與へられてある場合。但し  $f(D)$  は

$$f(D) \equiv \sum_{k=0}^l a_k D^k + \sum_{m=1}^n b_m D^{-m}.$$

$$\equiv a_l D^{-n} \prod_{k=1}^h (D - \alpha_k)^{r_k}.$$

$$\equiv a_l D^{-n} \prod_{k=1}^N (D - \beta_k).$$

とする。こゝに  $a_k$  及び  $b_m$  は常數、 $\alpha_k$  は  $f(x)=0$  の  $r_k$  重根であつて、 $\alpha_k$  と  $\beta_k$  との對應關係は、

$$\begin{array}{ll} \alpha_1, \alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_1; & \alpha_2, \alpha_2, \alpha_2; \\ \beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_{r_1}; & \beta_{r_1+1}, \beta_{r_1+2}, \dots, \beta_{r_1+r_2}; \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \alpha_3, \dots, \alpha_3 \\ \beta_{r_1+r_2+1}, \dots, \beta_{r_1+r_2+r_3} \end{array}$$

の如くなつてゐるものとする。又

$$\sum_{k=1}^h r_k = l + n \equiv N$$

とする。

第一法：(IV.28) 式の關係を用ひて (V.5) 式を書き換えれば、

$$\begin{aligned} f(p)y &= F(t) \\ &+ \sum_{u=0}^{l-1} p^{u+1} \left( \sum_{k=0}^{l-u-1} a_{k+u+1} C_t^{(a)} D^k F(t) \right) \\ &- \sum_{v=0}^{n-1} p^{-v} \left( \sum_{m=0}^{n-v-1} b_{m+v+1} C_t^{(a)} D^{-m-1} F(t) \right), \end{aligned} \dots \dots \dots (V.6)$$

となるから、この式の兩邊に  $f(p)^{-1}$  を作用せしむれば、

$$\begin{aligned} y &= f(p)^{-1} F(t) \\ &+ \sum_{u=0}^{l-1} f(p)^{-1} p^{u+1} \left( \sum_{k=0}^{l-u-1} a_{k+u+1} F^{(k)}(a) \right) \end{aligned}$$

$$- \sum_{v=0}^{n-1} f(p)^{-1} p^{-v} \left( \sum_{m=0}^{n-v-1} b_{m+v+1} F^{-(m+1)}(a) \right), \dots \dots \dots (V.7)$$

を得るが、(IV.21) 式の關係により、

$$\begin{aligned} f(p)^{-1} &\equiv a_l^{-1} p^n \prod_{k=1}^h (p - \alpha_k)^{-r_k} \\ &\equiv \sum_{j=1}^h \sum_{r=1}^{r_j} A_{jr} (p - \alpha_j)^{-r}, \dots \dots \dots (V.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(p)^{-1} p^{u+1} &\equiv a_l^{-1} p^{n+u+1} \prod_{k=1}^h (p - \alpha_k)^{-r_k} \\ &\equiv a_l^{-1} \delta_{u, l-1} + \sum_{j=1}^h \sum_{r=1}^{r_j} B_{jru} (p - \alpha_j)^{-r}, \\ &\quad \left( \begin{array}{l} u=0, 1, 2, \dots, l-1, \\ \delta_{u, l-1} \equiv \begin{cases} 1, & u=l-1 \\ 0, & u \neq l-1 \end{cases} \end{array} \right), \dots \dots \dots (V.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(p)^{-1} p^{-v} &\equiv a_l^{-1} p^{n-v} \prod_{k=1}^h (p - \alpha_k)^{-r_k} \\ &\equiv \sum_{j=1}^h \sum_{r=1}^{r_j} C_{jrv} (p - \alpha_j)^{-r}, \\ &\quad (v=0, 1, 2, \dots, n-1), \dots \dots \dots (V.10) \end{aligned}$$

なる故、

$$\begin{aligned} y &= \sum_{j=1}^h \sum_{r=1}^{r_j} A_{jr} (p - \alpha_j)^{-r} F(t) \\ &+ \sum_{u=0}^{l-1} \left( a_l^{-1} \delta_{u, l-1} + \sum_{j=1}^h \sum_{r=1}^{r_j} B_{jru} (p - \alpha_j)^{-r} \right) \\ &\quad \cdot \left( \sum_{k=0}^{l-u-1} a_{k+u+1} F^{(k)}(a) \right) \\ &- \sum_{v=0}^{n-1} \sum_{j=1}^h \sum_{r=1}^{r_j} C_{jrv} (p - \alpha_j)^{-r} \\ &\quad \cdot \left( \sum_{m=0}^{n-v-1} b_{m+v+1} F^{-(m+1)}(a) \right), \dots \dots \dots (V.11) \end{aligned}$$

を得る。こゝに於て、右邊第1項に就ては、

$$(p - \alpha_j)^{-r} F(t) \equiv \varepsilon^{a_j t} \int_a^t \dots \int_a^t \varepsilon^{-a_j t} F(t) (dt)^r$$

を、右邊第2項及び第3項に就ては (IV.23) 式を利用すれば、所要の一般解が得られるのである。

もし、(IV.10) 式により、

$$\begin{aligned} (p - \alpha_j)^{-r} F(t) &\equiv (D - \alpha_j)^{-r} F(t) \\ &- \frac{1}{\Gamma(r)} \frac{\partial^{r-1}}{\partial \alpha_j^{r-1}} \left( \varepsilon^{a_j t} \int_a^t \varepsilon^{-a_j t} F(t) dt \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\equiv (D - \alpha_j)^{-r} F(t) \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(r)} \sum_{\mu=0}^{r-1} \binom{r-1}{\mu} t^{r-\mu-1} \varepsilon^{\alpha_j t} \cdot \\ &\quad \cdot \int_0^a (-t)^\mu \varepsilon^{-\alpha_j t} F(t) dt, \dots \dots \dots (V.12) \end{aligned}$$

とすれば、所要の解は又、

$$\begin{aligned} y = & \sum_{j=1}^h \sum_{r=1}^{r_j} A_{jr} \varepsilon^{\alpha_j t} \int_0^t \dots \int_0^t \varepsilon^{-\alpha_j t} F(t) (dt)^r \\ & - \sum_{j=1}^h \sum_{r=1}^{r_j} \sum_{\mu=0}^{r-1} \frac{(-)^\mu}{\mu! (r-\mu-1)!} t^{r-\mu-1} \varepsilon^{\alpha_j t} \\ & \quad \cdot \int_0^a t^\mu \varepsilon^{-\alpha_j t} F(t) dt \\ & + \sum_u \left( a_l^{-1} \delta_{u, l-1} + \sum_j \sum_r \binom{r}{j} \right) \sum_k \binom{r}{k} \\ & - \sum_r \sum_j \sum_r \binom{r}{j} \sum_m \binom{r}{m}, \dots \dots \dots (V.13) \end{aligned}$$

とも書ける。この式の右邊第2項以下は、微分方程式

$$f(D) y = 0, \dots \dots \dots (V.14)$$

の一般解を表はし、又右邊第1項は、微分方程式 (V.5) の特解

$$y_1 = f(D)^{-1} F(t), \dots \dots \dots (V.15)$$

を表はしてゐるが、前節に於ても述べたる如く、從來の記號的解法は、(V.15) 式によつて得らるる特解のみに注目してゐたのである。(14)

例 1).

$(D^3 - 3D^2 + 4)y = \varepsilon^t + \cos t$  を、 $t=a$  に於て  $y=y_a$   $y'=y_a'$ ,  $y''=y_a''$  なる條件の下に解け。

解: (V.7) 式により、

$$\begin{aligned} y = & (p^3 - 3p^2 + 4)^{-1} (\varepsilon^t + \cos t) \\ & + \sum_{u=0}^2 (p^3 - 3p^2 + 4)^{-1} p^{u+1} \left( \sum_{k=0}^{2-u} a_{k+u+1} y_a^{(k)} \right), \\ & (a_1=0, \quad a_2=-3, \quad a_3=1). \end{aligned}$$

而して、(IV.21) 式により、

$$\begin{aligned} (p^3 - 3p^2 + 4)^{-1} \cdot & \equiv \frac{1}{9} (p+1)^{-1} \cdot - \frac{1}{9} (p-2)^{-1} \cdot \\ & + \frac{1}{3} (p-2)^{-2} \cdot, \\ (p^3 - 3p^2 + 4)^{-1} p \cdot & \equiv -\frac{1}{9} (p+1)^{-1} \cdot \\ & + \frac{1}{9} (p-2)^{-1} \cdot + \frac{2}{3} (p-2)^{-2} \cdot, \\ (p^3 - 3p^2 + 4)^{-1} p^2 \cdot & \equiv \frac{1}{9} (p+1)^{-1} \cdot \\ & + \frac{8}{9} (p-2)^{-1} \cdot + \frac{4}{3} (p-2)^{-2} \cdot, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (p^3 - 3p^2 + 4)^{-1} p^3 \cdot & \equiv 1 \cdot - \frac{1}{9} (p+1)^{-1} \cdot \\ & + \frac{28}{9} (p-2)^{-1} \cdot + \frac{8}{3} (p-2)^{-2} \cdot. \end{aligned}$$

なる故、所要の解は、

$$\begin{aligned} y = & \frac{1}{2} \varepsilon^t + \frac{1}{50} (7 \cos t - \sin t) \\ & + \frac{1}{18} (8 y_a - 8 y_a' + 2 y_a'' - \varepsilon^a - \cos a \\ & \quad - \sin a) \varepsilon^{-(t-a)} \\ & + \left[ \frac{1}{9} \left\{ (5+6a) y_a + (4+3a) y_a' \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - (1+3a) y_a'' - (4+3a) \varepsilon^a \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{225} \left\{ (19+30a) \cos a \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. - (17+15a) \sin a \right\} \right\} \varepsilon^{2(t-a)} \right. \\ & \left. - \frac{1}{15} \left\{ 5(2 y_a + y_a' - y_a'') - 5 \varepsilon^a - 2 \cos a \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \sin a \right\} t \varepsilon^{2(t-a)} \dots \dots \dots (V.16) \right. \end{aligned}$$

となる。

例 2).

$(D^2 - 2)y = 4t^2 \varepsilon^{t^2}$  を、 $t=a$  に於て、 $y=y_a$  及び  $y'=y_a'$  なる條件の下に解け。

解: (IV.27) 式により、微分方程式を變形すれば、

$$(p^2 - 2)y = 4t^2 \varepsilon^{t^2} + p y_a' + p^2 y_a$$

なる故、所要の解は、

$$\begin{aligned} y = & (p^2 - 2)^{-1} 4t^2 \varepsilon^{t^2} + (p^2 - 2)^{-1} p y_a' \\ & + (p^2 - 2)^{-1} p^2 y_a \\ = & \varepsilon^{t^2} + \left( \frac{1}{\sqrt{2}} y_a' - \sqrt{2} a \varepsilon^{a^2} \right) \sinh \sqrt{2} (t-a) \\ & + (y_a - \varepsilon^{a^2}) \cosh \sqrt{2} (t-a), \dots (V.17) \end{aligned}$$

となる。此の例に對しては、所謂 Laplace 變換法を直接に適用することは出来ない。何となれば、

$$\int_a^b \varepsilon^{-\lambda t} t^2 \varepsilon^{t^2} dt, \quad (R_c(\lambda) > 0)$$

は  $b \rightarrow +\infty$  に於て發散するからである。尤もこの様な例に對しては特別な工夫により、Laplace 變換法の變形とも看られる解法を得ることも出来るが、これに就ては第 III 篇に於て説明する。

第二法: (V.5) 式を

$$(D - \beta_1) a_1 D^{-n} \prod_{k=2}^N (D - \beta_k) y = F(t), \dots \dots (V.18)$$

の如く書き換え、これに (V.3) 式の関係を採用すると第1中間積分、

$$a_1 D^{-n} \prod_{k=2}^N (D - \beta_k) y = A_1 \varepsilon^{\beta_1 t} + (D - \beta_1)^{-1} F(t)$$

を得る。ここに、 $A_1$  は積分常數である。次に第2中間積分は、 $A_2$  を積分常數として、



$$a_i D^{-1} \prod_{k=3}^N (D - \beta_k) y = A_2 \varepsilon^{\beta_2 t} + A_1 (D - \beta_2)^{-1} \varepsilon^{\beta_1 t}$$

$$+ (D - \beta_2)^{-1} (D - \beta_1)^{-1} F(t)$$
 となる。順次、同様に、 $N$  回目の積分を求めれば、

$$\begin{aligned}
 a_i D^{-n} y &= A_N \varepsilon^{\beta_N t} + A_{N-1} (D - \beta_N)^{-1} \varepsilon^{\beta_{N-1} t} + \dots \\
 &\dots + (D - \beta_N)^{-1} \dots (D - \beta_2)^{-1} (D - \beta_1)^{-1} F(t)
 \end{aligned}$$

を得るが、これを少しく変形すれば、所要の解は、

$$y = \sum_{k=1}^N A_k \left( \frac{\partial^k f(D)}{\partial \beta_1 \partial \beta_2 \dots \partial \beta_k} \right)^{-1} \varepsilon^{\beta_k t} + f(D)^{-1} F(t), \quad \dots \dots \dots (V.19)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^{r_1} A_k \left( \frac{\partial^k f(D)}{\partial \alpha_1^k} \right)^{-1} \varepsilon^{\alpha_1 t} \\
 &+ \sum_{k=1}^{r_2} A_{r_1+k} \left( \frac{\partial^k f(D)}{\partial \alpha_2^k} \right)^{-1} \varepsilon^{\alpha_2 t} + \dots \dots \dots (V.20) \\
 &\dots \dots \dots + f(D)^{-1} F(t), \dots \dots \dots (V.21)
 \end{aligned}$$

等の如くなる。ここに  $B_k$  ( $k=1, 2, \dots, N$ ) は任意の常数である。而して上式の内、

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^N A_k \left( \frac{\partial^k f(D)}{\partial \beta_1 \partial \beta_2 \dots \partial \beta_k} \right)^{-1} \varepsilon^{\beta_k t} &= \sum_{k=1}^{r_1} B_k t^{r_1-k} \varepsilon^{\alpha_1 t} \\
 &+ \sum_{k=1}^{r_2} B_{r_1+k} t^{r_2-k} \varepsilon^{\alpha_2 t} + \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

は (V.14) 式の一般解を、又  $f(D)^{-1} F(t)$  は (V.5) 式の特解を表はしてゐるのである。

例 1).

$(D^3 - 3D^2 + 4)y = \varepsilon^t + \cos t$  の一般解：

$(D^3 - 3D^2 + 4) \cdot \equiv (D+1)(D-2)^2 \cdot$  なる故、

(V.21) 式に於て、

$$\begin{aligned}
 r_1 &= 1, & r_2 &= 2, & N &= 3, \\
 \alpha_1 &= -1, & \alpha_2 &= 2
 \end{aligned}$$

$$(D^3 - 3D^2 + 4)^{-1} \varepsilon^t \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^t,$$

$$(D^3 - 3D^2 + 4)^{-1} \cos t \equiv \frac{1}{50} (7 \cos t - \sin t).$$

よつて、所要の解は、

$$y = \frac{1}{2} \varepsilon^t + \frac{1}{50} (7 \cos t - \sin t)$$

$$+ B_1 \varepsilon^{-t} + B_2 t \varepsilon^{2t} + B_3 \varepsilon^{2t}$$

となるが、これは、(V.16) 式に於て、 $a, y_a, y_a'$  及び  $y_a''$  等を任意の常数と考へたる場合の解と一致するのである。

例 2).

$(D^2 - 2)y = 4t^2 \varepsilon^{t^2}$  の一般解：

(V.21) 式に於て、

$$\begin{aligned}
 r_1 &= r_2 = 1, & N &= 2, \\
 \alpha_1 &= 1/\sqrt{2}, & \alpha_2 &= -1/\sqrt{2}, \\
 (D^2 - 2)^{-1} 4t^2 \varepsilon^{t^2} &\equiv \varepsilon^{t^2}
 \end{aligned}$$

なる故、所要の解は、

$$y = \varepsilon^{t^2} + B_1 \varepsilon^{\sqrt{2}t} + B_2 \varepsilon^{-\sqrt{2}t}$$

となり、(V.17) 式に於て、 $a, y_a$  及び  $y_a'$  等を任意の常数と考へたる場合の解と一致するのである。

§§ V. 3. 2. 微分方程式が、

$$\sum_{l=1}^n f_{m,l}(D) y_l = F_m(t), \quad (m=1, 2, \dots, n), \quad \dots \dots \dots (V.22)$$

の如く聯立して與へられてある場合。ことに

$$\begin{aligned}
 f_{m,l}(D) \cdot &\equiv \sum_{\mu=0}^{\nu_{m,l}} a_{\mu}(m,l) D^{\mu} \cdot \\
 &+ \sum_{\nu=1}^{\nu_{m,l}} b_{\nu}(m,l) D^{-\nu} \cdot
 \end{aligned}$$

とする。

第一法： §§ V. 3. 1. の第一法の場合と全く同様にして、

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=1}^n f_{m,l}(p) y_l &= F_m(t) \\
 &+ \sum_{l=1}^n \left\{ \sum_{\mu=1}^{\nu_{m,l}} \sum_{r=0}^{\mu-1} a_{\mu} \left( \begin{matrix} \mu-1 \\ r \end{matrix} \right) p^{r+1} C \left( \begin{matrix} a \\ t \end{matrix} \right) D^{\mu-r-1} y_l \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{\nu=1}^{\nu_{m,l}} \sum_{s=0}^{\nu-1} b_{\nu} \left( \begin{matrix} \nu-1 \\ s \end{matrix} \right) p^{-s} C \left( \begin{matrix} a \\ t \end{matrix} \right) D^{-\nu+s} y_l \right\}
 \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (V.23)$$

なる関係を得るが、

$$\begin{aligned}
 \Delta(p) \cdot &\equiv \det. f_{m,l}(p) \cdot \\
 &\equiv \begin{vmatrix} f_{1,1}(p) & \dots & f_{1,n}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n,1}(p) & \dots & f_{n,n}(p) \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

とすれば、

$$y_l = \sum_{m=1}^n \frac{1}{\Delta(p)} \frac{\partial \Delta(p)}{\partial f_{m,l}(p)} K_m(p, t), \quad (l=1, 2, \dots, n), \quad \dots \dots \dots (V.24)$$

なる結果を得る。ことに、 $K_m(p, t)$  は (V.23) 式の右邊を表はす。而して (V.24) 式の右邊の計算は、

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\Delta(p)} \frac{\partial \Delta(p)}{\partial f_{m,l}(p)} \cdot, \quad \frac{1}{\Delta(p)} \frac{\partial \Delta(p)}{\partial f_{m,l}(p)} p^{r+1} \cdot, \\
 &\frac{1}{\Delta(p)} \frac{\partial \Delta(p)}{\partial f_{m,l}(p)} p^{-s} \cdot
 \end{aligned}$$

等を、(IV.21) 式の関係を利用して部分分數式に展開し、然る後、定積分を實行すればよいのである。但し、與へられた問題の種類によつては、此の際少しく注意を要す

るものがあるが、これに就ては次節に述べる。

例 1).

$$\left. \begin{aligned} (D+1)x - Dy &= t \\ (D^2+3)x - (D+1)y &= \varepsilon^{2t} \end{aligned} \right\} \text{を、} t=a \text{ に於て、}$$

$x=x_a, x'=x_a'$  及び  $y=y_a$  なる條件の下に解け。

解:

$$\begin{aligned} f_{1,1}(p) &\equiv (p+1) \cdot, \quad f_{1,2}(p) \equiv -p \cdot \\ f_{2,1}(p) &\equiv (p^2+3) \cdot, \quad f_{2,2}(p) \equiv -(p+1) \cdot, \\ \Delta(p) &\equiv (p-1)(p^2+1) \cdot, \\ \frac{\partial \Delta(p)}{\partial f_{1,1}(p)} &\equiv -(p+1) \cdot, \quad \frac{\partial \Delta(p)}{\partial f_{1,2}(p)} \equiv p \cdot, \\ \frac{\partial \Delta(p)}{\partial f_{2,1}(p)} &\equiv -(p^2+3) \cdot, \quad \frac{\partial \Delta(p)}{\partial f_{2,2}(p)} \equiv (p+1) \cdot, \end{aligned}$$

なる故、(V. 24) 式により、

$$\begin{aligned} x &= -\frac{p+1}{(p-1)(p^2+1)} \left\{ t + p(x_a - y_a) \right\} \\ &\quad + \frac{p}{(p-1)(p^2+1)} \left\{ \varepsilon^{2t} + p(x_a' - y_a) + p^2 x_a \right\} \\ &= 2 + t + \frac{2}{5} \varepsilon^{2t} - \frac{1}{2} (2 + 2a + \varepsilon^{2a} + x_a - x_a' - y_a) \varepsilon^{t-a} \\ &\quad - \frac{1}{10} \left\{ 10 - \varepsilon^{2a} - 5(3x_a - x_a' - y_a) \right\} \cos(t-a) \\ &\quad - \frac{1}{10} \left\{ -10a + 3\varepsilon^{2a} - 5(x_a + x_a' - y_a) \right\} \sin(t-a), \\ y &= -\frac{p^2+3}{(p-1)(p^2+1)} \left\{ t + p(x_a - y_a) \right\} \\ &\quad + \frac{p+1}{(p-1)(p^2+1)} \left\{ \varepsilon^{2t} + p(x_a' - y_a) + p^2 x_a \right\} \\ &= 3 + 3t + \frac{3}{5} \varepsilon^{2t} - (2 + 2a + \varepsilon^{2a} + x_a - x_a' - y_a) \varepsilon^{t-a} \\ &\quad - \frac{1}{5} \left\{ 5 + 5a - 2\varepsilon^{2a} - 5(x_a - x_a') \right\} \cos(t-a) \\ &\quad - \frac{1}{5} \left\{ 5 - 5a + \varepsilon^{2a} - 5(2x_a - y_a) \right\} \sin(t-a), \\ &\quad \dots\dots\dots (V. 25) \end{aligned}$$

の如く所要の解が得られる。

例 2).

$$\left. \begin{aligned} (D+1)x - y &= \varepsilon^t \\ x + Dy - z &= \cos t \\ x + Dz &= 0 \end{aligned} \right\} \text{を、} t=a \text{ に於て、}$$

$x=x_a, y=y_a$  及び  $z=z_a$  なる條件の下に解け。

解:

$$\begin{aligned} \Delta(p) &\equiv \begin{vmatrix} p+1 & -1 & 0 \\ 1 & p & -1 \\ 1 & 0 & p \end{vmatrix} \equiv (p+1)(p^2+1) \cdot, \\ \frac{\partial \Delta(p)}{\partial f_{1,1}(p)} &\equiv p^2 \cdot, \quad \frac{\partial \Delta(p)}{\partial f_{2,1}(p)} \equiv p \cdot, \\ \frac{\partial \Delta(p)}{\partial f_{3,1}(p)} &\equiv 1 \cdot. \end{aligned}$$

なる故、

$$x = \frac{p^2}{(p+1)(p^2+1)} \left( \varepsilon^t + p x_a \right)$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{p}{(p+1)(p^2+1)} \left( \cos t + p y_a \right) \\ &+ \frac{1}{(p+1)(p^2+1)} p z_a \\ &= \frac{1}{4} \varepsilon^t + \frac{1}{8} \left( \cos t + \sin t \right) \left\{ 2(t-a) - 1 \right\} \\ &+ \frac{1}{4} \left\{ \cos a + \sin a - \varepsilon^a + 2(x_a - y_a + z_a) \right\} \varepsilon^{-(t-a)} \\ &+ \frac{1}{8} \left\{ \cos a - \sin a + 4\varepsilon^a \right. \\ &\quad \left. - 4(x_a - y_a - z_a) \right\} \sin(t-a) \\ &- \frac{1}{8} \left\{ \cos a + \sin a - 4(x_a + y_a - z_a) \right\} \cos(t-a) \end{aligned}$$

を得る。同様にして、

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2} \varepsilon^t + \frac{1}{2} (t-a) \cos t + \frac{1}{4} \sin t \\ &\quad + \frac{1}{4} \left\{ \cos a + 2\varepsilon^a - 4x_a - z_a \right\} \sin(t-a) \\ &\quad + \frac{1}{4} \left\{ -\sin a + 2\varepsilon^a + 4y_a \right\} \cos(t-a), \\ z &= -\frac{1}{4} \varepsilon^t + \frac{1}{8} \left\{ 2(t-a) - 3 \right\} \cos t \\ &\quad - \frac{1}{8} \left\{ 2(t-a) + 1 \right\} \sin t \\ &\quad + \frac{1}{4} \left\{ \cos a + \sin a - \varepsilon^a + 2(x_a - y_a + z_a) \right\} \varepsilon^{-(t-a)} \\ &\quad + \frac{1}{8} \left\{ \cos a + \sin a - 4(x_a + y_a - z_a) \right\} \sin(t-a) \\ &\quad + \frac{1}{8} \left\{ \cos a - \sin a + 4\varepsilon^a \right. \\ &\quad \left. - 4(x_a - y_a - z_a) \right\} \cos(t-a) \dots\dots\dots (V. 26) \end{aligned}$$

が得られる。

第二法: 微分方程式 (V. 22) に於て、

$$\begin{aligned} \Delta(D) &\equiv \det. f_{m,l}(D) \equiv \begin{vmatrix} f_{1,1}(D) & \dots & f_{1,n}(D) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n,1}(D) & \dots & f_{n,n}(D) \end{vmatrix} \\ &\equiv \text{const.} \times D^{-M} \prod_{k=1}^{M+N} (D - \beta_k) \cdot \end{aligned}$$

とすると、

$$\Delta(D) y_l = \sum_{m=1}^n \frac{\partial \Delta(D)}{\partial f_{m,l}(D)} F_m(t), \quad (l=1, 2, \dots, n), \dots\dots\dots (V. 27)$$

が得られるから、(V. 19) 式に倣つて、

$$\begin{aligned} y_l &= \sum_{k=1}^{M+N} A_k \left( \frac{\partial^k \Delta(D)}{\partial \beta_1 \partial \beta_2 \dots \partial \beta_k} \right)^{-1} \varepsilon^{\beta_k t} \\ &\quad + \sum_{m=1}^n \frac{1}{\Delta(D)} \frac{\partial \Delta(D)}{\partial f_{m,l}(D)} F_m(t), \\ &\quad \dots\dots\dots (V. 28) \end{aligned}$$



$$= \sum_{k=1}^{M+N} A_k \varphi_k(t) + \psi_l(t), \dots \quad (\text{V. 29})$$

なる一般解を得ることが出来る。

例).

$$\left. \begin{aligned} (D+1)x - Dy &= t \\ (D^2+3)x - (D+1)y &= \varepsilon^{2t} \end{aligned} \right\} \text{を解け.}$$

解:

$$\begin{aligned} \Delta(D) \cdot &\equiv (D-1)(D^2+1) \cdot \\ \frac{\partial \Delta(D)}{\partial f_{1,1}(D)} \cdot &\equiv -(D+1) \cdot, \quad \frac{\partial \Delta(D)}{\partial f_{2,1}(D)} \cdot \equiv D \cdot, \\ \frac{\partial \Delta(D)}{\partial f_{1,2}(D)} \cdot &\equiv -(D^2+3) \cdot, \\ \frac{\partial \Delta(D)}{\partial f_{2,2}(D)} \cdot &\equiv (D+1) \cdot, \\ \frac{D+1}{(D-1)(D^2+1)} t &\equiv -(1+D)(1+D+D^2+\dots) \cdot \\ &\quad \cdot (1-D^2+D^4-\dots) t \\ &\equiv -(1+2D+D^2+\dots) t \\ &\equiv -t-2, \\ \frac{D}{(D-1)(D^2+1)} \varepsilon^{2t} &\equiv \frac{2}{5} \varepsilon^{2t}, \\ \frac{D^2+3}{(D-1)(D^2+1)} t &\equiv -(3+D^2)(1+D+D^2+\dots) \cdot \\ &\quad \cdot (1-D^2+D^4-\dots) t \\ &\equiv -3t-3, \\ \frac{D+1}{(D-1)(D^2+1)} \varepsilon^{2t} &\equiv \frac{3}{5} \varepsilon^{2t} \end{aligned}$$

なる故、所要の解は、

$$\begin{aligned} x &= 2+t + \frac{2}{5} \varepsilon^{2t} + A_1 \varepsilon^t + A_2 \cos t + A_3 \sin t, \\ y &= 3+3t + \frac{3}{5} \varepsilon^{2t} + 2A_1 \varepsilon^t + (A_2 - A_3) \cos t \\ &\quad + (A_2 + A_3) \sin t \end{aligned}$$

の如くなるが、これは (V. 25) 式に於て、 $a, x_a, x_a'$  及び  $y_a$  を任意の常数と看做した解と一致するものである。

#### § V. 4. §§ V. 3. 2. に對する注意

§ V. 3. に於ける説明より明かなる如く、第一法は、 $t$  のある一つの値、たとへば  $t=a$  に於ける所要の解及びその導函数の値等が與へられたとする時、直ちに所要の解の得られる特徴を有するが、こゝで、 $a$  及びこの點に於けるそれ等の函数の値が任意に與へられたるものと考へれば、それは又、第二法によつて得られる一般解(不定積分解)と一致するのである。然るに、§ V. 3. 2. に於ける如く、微分方程式が聯立して與へられてある場合には、特に注意すべき一つの事項が存在する。これを例を擧げて説明しよう。

例 1).

$$\left. \begin{aligned} (D^2+D+1)x + (D^2-D-1)y &= t \\ (D^2+2)x + (D^2-2)y &= \varepsilon^t \end{aligned} \right\} \dots \quad (\text{V. 30})$$

を解け。

解: 第二法によれば、

$$\Delta(D) \cdot \equiv \begin{vmatrix} D^2+D+1 & D^2-D-1 \\ D^2+2 & D^2-2 \end{vmatrix} \cdot \equiv 2D^2(D-1) \cdot,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta(D)}{\partial f_{1,1}(D)} &\equiv (D^2-2) \cdot, \\ \frac{\partial \Delta(D)}{\partial f_{2,1}(D)} \cdot &\equiv (D^2-D-1) \cdot, \\ \frac{\partial \Delta(D)}{\partial f_{1,2}(D)} &\equiv -(D^2+2) \cdot, \\ \frac{\partial \Delta(D)}{\partial f_{2,2}(D)} \cdot &\equiv (D^2+D+1) \cdot \end{aligned}$$

なる故、所要の解は、

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{6} t^3 + \frac{1}{2} t \varepsilon^t \\ &\quad + A_1 + A_2 t + A_3 \varepsilon^t, \\ y &= \frac{3}{2} + \frac{3}{2} t + \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{6} t^3 + \frac{3}{2} t \varepsilon^t \\ &\quad + A_1 + A_2 t + 3(A_3+1) \varepsilon^t \end{aligned}$$

となり、3 個の積分常数が入つて来る。抑々、微分方程式論によれば、常係数線型聯立常微分方程式の一般解の中に含まれる積分常数の数は、 $\Delta(D)$  中の  $D$  の最高幂の指數にて與へられるのであるから、このことは當然豫想せらるる所である。従つて原方程式 (V. 30) の形を一瞥して、 $t=a$  に於て、 $x=x_a, x'=x_a', y=y_a$  及び  $y'=y_a'$  なる条件を與へて解かんと試みる時は、これらの 4 個の値の間に或る適當な一つの関係が存在しなければならぬ。此の関係が如何なるものであるかを一般に知るには、第一法を利用するのが便利である。即ち  $a$  を適宜任意に與へて、(V. 30) 式を

$$\begin{aligned} (p^2+p+1)x + (p^2-p-1)y &= t + p(x_a' + y_a' \\ &\quad + x_a - y_a) + p^2(x_a + y_a), \\ (p^2+2)x + (p^2-2)y &= \varepsilon^t + p(x_a' + y_a') + p^2(x_a + y_a) \end{aligned}$$

の如く書き換えれば、

$$\begin{aligned} x &= -\frac{p^2-2}{2p^2(p-1)} \left\{ t + p(x_a' + y_a' + x_a - y_a) \right. \\ &\quad \left. + p^2(x_a + y_a) \right\} \\ &\quad - \frac{p^2-p-1}{2p^2(p-1)} \left\{ \varepsilon^t + p(x_a' + y_a') + p^2(x_a + y_a) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 1+a+3\varepsilon^a+3x_a-y_a+(1+2a+\varepsilon^a+2x_a \right. \\ &\quad \left. -2y_a+x_a'+y_a'+\varepsilon^t)(t-a)+(1+a)(t-a)^2 \right. \\ &\quad \left. +\frac{1}{3}(t-a)^3-(1+a+3\varepsilon^a+x_a-y_a)\varepsilon^{t-a} \right\}, \\ &\dots \dots \dots (\text{V. 32}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= -\frac{p^2+2}{2p^2(p-1)} \left\{ t + p(x_a' + y_a' + x_a - y_a) \right. \\ &\quad \left. + p^2(x_a + y_a) \right\} \\ &\quad + \frac{p^2+p+1}{2p^2(p-1)} \left\{ \varepsilon^t + p(x_a' + y_a') + p^2(x_a + y_a) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 3(1+a)+3\varepsilon^a+3x_a-y_a \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (3+2a+\varepsilon_a+2x_a-2y_a+x'_a+y'_a+3\varepsilon^t)(t-a) \\
& + (1+a)(t-a)^2 + \frac{1}{3}(t-a)^3 \\
& - 3(1+a+\varepsilon^a+x_a-y_a)\varepsilon^{t-a} \Big\}, \dots\dots\dots (V. 33)
\end{aligned}$$

の如く解けるが、 $t=a$  に於て、 $x=x_a$ ,  $x'=x'_a$ ,  $y=y_a$  及び  $y'=y'_a$  なる關係を滿足する爲には、(V. 32) 式又は (V. 33) 式より、

$$(x'_a - y'_a) - (x_a - y_a) = a - \varepsilon^a, \dots\dots\dots (V. 34)$$

なる條件の成立つことの必要であることがわかる。此の條件は實は、二つの原方程式の差を作り、その  $t=a$  に於ける關係として直ちに得られるものである。而してこの二式の差は、原方程式の一つの中間積分に當るわけであつて、それが積分操作なしに（此の場合は代數的操作である）得られてゐるわけである。一般に微分方程式が更に高次、多元であつて、 $t=a$  に於て  $x=x_a$ ,  $x'=x'_a$ ,  $x''=x''_a, \dots$ ;  $y=y_a$ ,  $y'=y'_a, \dots$ ;  $z=z_a$ ,  $z'=z'_a, \dots$  等の如く與へられたとする時、かゝる積分操作なしに得られる中間積分がいくつか存在するとすれば、この積分の數に相當するだけ  $x_a, x'_a, x''_a, \dots$ ;  $y_a, y'_a, \dots$ ;  $z_a, z'_a, \dots$  等の間にある關係が成立せねばならない。かくの如き關係は、例 1). の如き簡單なるものにあつては、視察により容易に判明するが、一般の場合には、必ずしも容易ではない。而してさきに述べた第一法は、かくの如き關係を求むる一般的方法として役立つ事は、上述の一例によつてもその一端を窺ふことが出来るが、更に次に示す二つの例によつてその全貌を察知することが出来る

例 2).

$$\left. \begin{aligned} (D^2+1)x + (D^2-D)y &= t \\ (D^2+D)x + (D^2-3)y &= \varepsilon^t \end{aligned} \right\}, \dots\dots\dots (V. 35)$$

を解け。

解： 第二法によつて解けば、

$$\begin{aligned}
x &= t + A_1 \cos 1/\sqrt{3} t + A_2 \sin 1/\sqrt{3} t, \\
y &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \varepsilon^t - \frac{1}{2} \left( A_1 - \frac{A_2}{1/\sqrt{3}} \right) \cos 1/\sqrt{3} t \\
& \quad - \frac{1}{2} \left( \frac{A_1}{1/\sqrt{3}} + A_2 \right) \sin 1/\sqrt{3} t
\end{aligned}$$

又、第一法によつて解けば、

$$\begin{aligned}
x &= t - \frac{1}{1/\sqrt{3}} \left\{ 2 + 3(y_a - x'_a - y'_a) \right\} \sin 1/\sqrt{3} (t-a) \\
& \quad + \left( \varepsilon^a - 2a + 2x_a + 3y_a - x'_a - y'_a \right) \cos 1/\sqrt{3} (t-a), \\
& \quad \dots\dots\dots (V. 36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \varepsilon^t + \frac{1}{1/\sqrt{3}} \left( 1 + a - \frac{1}{2} \varepsilon^a \right. \\
& \quad \left. - x_a - x'_a - y'_a \right) \sin 1/\sqrt{3} (t-a) \\
& \quad - \left( \frac{1}{3} - a + \frac{1}{2} \varepsilon^a + x_a + 2y_a \right. \\
& \quad \left. - x'_a - y'_a \right) \cos 1/\sqrt{3} (t-a) \\
& \quad \dots\dots\dots (V. 37)
\end{aligned}$$

を得るが、 $t=a$  に於て、 $x=x_a$ ,  $x'=x'_a$ ,  $y=y_a$  及び  $y'=y'_a$  なる條件を考慮すれば、

$$x_a + 3y_a - x'_a - y'_a + \varepsilon^a - a = 0, \dots\dots\dots (V. 38)$$

$$3y_a - 2x'_a - 3y'_a + 1 = 0, \dots\dots\dots (V. 39)$$

$$x_a + x'_a + 2y'_a + \varepsilon^a - a - 1 = 0, \dots\dots\dots (V. 40)$$

の如き關係が存在せねばならぬ。尤も上の 3 式中、その二つが獨立で、他の一つはそれ以外の式より導き得るものである。而して、(V. 38) 式は、二つの原方程式の差より直ちに得られるが、(V. 39) 式又は (V. 40) 式は、これを (V. 35) 式より直接に導くには相當の工夫と吟味とを要することを考へれば、上述の方法の便利なることが理解されよう。

例 3).

$$\left. \begin{aligned} (D^2+1)x + (D^2+D+1)y &= t \\ Dx + (D+1)y &= \varepsilon^t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (V. 41)$$

を解け。

解： 第二法を適用して見ると、

$$\Delta(D) \cdot \equiv 1.$$

であるから、解は、

$$x = (D+1)t - (D^2+D+1)\varepsilon^t = 1+t-3\varepsilon^t$$

$$y = -Dt + (D^2+1)\varepsilon^t = -1+2\varepsilon^t$$

の如くなり、積分常数を全く含まぬ極端な場合を示してゐる。

これを第一法により解いて見るに、 $t=a$  に於て、 $x=x_a$ ,  $x'=x'_a$ ,  $y=y_a$  及び  $y'=y'_a$  が與へられたとして、前の例の如く計算すれば、

$$\begin{aligned}
x &= (p+1) \left\{ t + p(x'_a + y'_a + y_a) + p^2(x_a + y_a) \right\} \\
& \quad - (p^2+p+1) \left\{ \varepsilon^t + p(x_a + y_a) \right\} \\
&= 1+t-3\varepsilon^t + p(x'_a + y'_a - x_a + a - 2\varepsilon^a) \\
& \quad + p^2(x'_a + y'_a + y_a - \varepsilon^a) \\
y &= -p \left\{ t + p(x'_a + y'_a + y_a) + p^2(x_a + y_a) \right\} \\
& \quad + (p^2+1) \left\{ \varepsilon^t + p(x_a + y_a) \right\} \\
&= -1+2\varepsilon^t + p(x_a + y_a - a + \varepsilon^a) \\
& \quad - p^2(x'_a + y'_a + y_a - \varepsilon^a)
\end{aligned}$$

を得るが、こゝで  $t=a$  に於ける條件を考慮すれば、

$$\left. \begin{aligned} x_a &= 1+a-3\varepsilon^a \\ y_a &= -1+2\varepsilon^a \\ x'_a &= 1-3\varepsilon^a \\ y'_a &= 2\varepsilon^a, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (V. 42)$$

$$\left. \begin{aligned} x'_a + y'_a - x_a + a - 2\varepsilon^a &= 0 \\ x_a + y_a - a + \varepsilon^a &= 0 \\ x'_a + y'_a + y_a - \varepsilon^a &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (V. 43)$$

なる 7 個の關係式を得るが、この中獨立なる關係は 4 個（たとへば (V. 42) 式）で他の 3 個はこの 4 個の關係より導かれるものである。尙 (V. 43) 式の最後の關係式は、微分方程式 (V. 41) 式の第 2 式より直ちに得られ

るものである。是等7個の關係式は實は適當なる工夫により、原方程式 (V. 41) より、積分操作なしに得らるべき筈のものなのである。

### § V. 5. 前節の續き

さて、§ V. 4. に於ては、線型聯立常微分方程式の解法に對する第一法の特徴を明かにしたのであるが、林氏は、此の點に關し、少しく異なつた解釋を發表されてゐるので(15)、こゝにその概要を紹介し、その解釋の妥當ならざる所以を明かにしよう。

さきに、§ I. 2. に於て簡単に述べ、又、後に第 II 篇に於て詳細に論ずる如く、演算子法の大特徴は、——それが初期値問題に應用されたる時、もし  $t < 0$  に於ける物理的状態が完全に規定せられてあつて、 $t > 0$  の状態は、この  $t < 0$  の状態より一義的に決定され得べき如き場合は、(たとへば第 1 圖の回路で云へば、 $C$  に與へられる電荷及び回路要素がすべて既知なりとすれば、 $S$  を閉ぢたる後の電流  $i_1$  及び  $i_2$  は、これ等の既知量より一義的に定まる。)——通常の初期値問題解法の場合に於けるが如く、 $t = +0$  の状態を知つて解を求むることをしなくとも、 $t = -0$  の状態を用ひて所要の解の得られることにあるのであるが、林氏は、この性質を、聯立微分方程式解法的第一法に結び付けて、たとへば、次の如き説明をなしてゐる。

$$\left. \begin{aligned} (D^2+1)x + (D^2-2D)y &= 0 \\ (D^2+D)x + D^2y &= 0 \end{aligned} \right\}, (t > 0)$$

を  $t = 0$  に於て、 $x = x_0$ ,  $x' = x_0'$ ,  $y = y_0$  及び  $y' = y_0'$  なる初期條件の下に解けと云ふ問題が與へられたとする。これを、§ V. 4. に於ける例題の如くして解けば、

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{2}{3}(x_0 + x_0' + y_0') \\ &\quad + \left(\frac{1}{3}x_0 - 2x_0' - 2y_0'\right)\varepsilon^{-3t}, \\ y &= \frac{1}{9}(-2x_0 + 4x_0' + 9y_0 + 4y_0') \\ &\quad + \frac{1}{3}(x_0 + x_0' + y_0')t \\ &\quad + \frac{2}{9}(x_0 - 2x_0' - 2y_0')\varepsilon^{-3t} \end{aligned} \right\} (t > 0), \dots (V. 44)$$

$$x_0 - x_0' - 2y_0' = 0, \dots (V. 45)$$

の如くなり、 $x_0$ ,  $x_0'$ ,  $y_0$  及び  $y_0'$  は實は獨立には與へられないこととなるが、これは、是等の値を  $t = +0$  に於ける値、 $x_{+0}$ ,  $x_{+0}'$ ,  $y_{+0}$  及び  $y_{+0}'$  と考へたためであつて、是等を  $t = -0$  に於ける値、 $x_{-0}$ ,  $x_{-0}'$ ,  $y_{-0}$  及び  $y_{-0}'$  と考へれば、解は、

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{2}{3}(x_{-0} + x_{-0}' + y_{-0}') \\ &\quad + \frac{1}{3}(x_{-0} - 2x_{-0}' - 2y_{-0}')\varepsilon^{-3t}, \\ y &= \frac{1}{9}(-2x_{-0} + 4x_{-0}' + 9y_{-0} + 4y_{-0}') \\ &\quad + \frac{1}{3}(x_{-0} + x_{-0}' + y_{-0}')t \\ &\quad + \frac{2}{9}(x_{-0} - 2x_{-0}' - 2y_{-0}')\varepsilon^{-3t} \end{aligned} \right\} (t > 0), \dots (V. 46)$$

となり、 $x_{-0}$ ,  $x_{-0}'$ ,  $y_{-0}$  及び  $y_{-0}'$  は獨立であつても差支へなくなる。而して、

$$\left. \begin{aligned} x_{+0} &= x_{-0}, & x_{+0}' &= -x_{-0} + 2x_{-0}' + 2y_{-0}', \\ y_{+0} &= y_{-0}, & y_{+0}' &= x_{-0} - x_{-0}' - y_{-0}' \end{aligned} \right\} \dots (V. 47)$$

であつて、 $t = -0$  に於ける値と、 $t = +0$  に於ける値とは必ずしも一致せぬと云ふのである。

所で、かくの如き問題に於て、與へられた初期値を、 $t = -0$  に於けるものと看做すか、或は  $t = +0$  に於けるものと解釋すべきか、問題の要點はこゝにあるわけであるが、從來の微分方程式論の常識を以てすれば、これは  $t = +0$  に於けるものと解釋すべきが當然であらう。何となれば、これを  $t = -0$  に於けるものと解釋して問題の一義的解を得る爲には、原微分方程式の他に、更に、所要の解の  $t = +0$  に於ける値は、原微分方程式を利用して、 $t = -0$  に於ける値、 $x_{-0}$ ,  $x_{-0}'$ ,  $y_{-0}$  及び  $y_{-0}'$  等より一義的に決定され得べしといふ條件が必要であるからである。實際、電氣回路解析の問題にあつては、多くは此の條件が、回路構成の機構中に自然に含まれてゐるのであつて、初期値を  $t = -0$  に於けるものとするか、或は  $t = +0$  のものをとるべきかは自ら定まつて來るのであるが、現在の問題の如く、單に、初期値問題の練習題の如き形で與へられてある時は、從來の常識に従ふのが妥當であらう。事實、與へられたる初期値を  $t = -0$  に於けるものとしても、上に挙げたる如き條件がなければ吾々は更に  $t = +0$  に於て (V. 47) 式なる關係によつて與へられたる如き  $x_{+0}$ ,  $x_{+0}'$ ,  $y_{+0}$  及び  $y_{+0}'$  とは異つた初期値を持つ解を得ることも出来るのである。たとへば林氏の考へによる時は、

$$\left. \begin{aligned} x_{-0} &= y_{-0} = 0, \\ x_{-0}' &= y_{-0}' = 1 \end{aligned} \right\} \dots (V. 48)$$

とすれば (V. 46) 式より

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{4}{3}(1 - \varepsilon^{-3t}) \\ y &= \frac{8}{9}(1 - \varepsilon^{-3t}) + \frac{2}{3}t \end{aligned} \right\} (t > 0), \dots (V. 49)$$

でなければならぬが、吾々は、 $t = -0$  に於ては、(V. 48) 式にて表はされる値をもつてゐるが、 $t = +0$  では、

$$x_{+0} = 1, \quad y_{+0} = -1, \quad x_{+0}' = 0$$

の如き値を持つ解、

$$\left. \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= -1 + \frac{1}{2}t \end{aligned} \right\} (t > 0), \dots (V. 50)$$

を得ることも可能であれば、又  $t = +0$  に於て、

$$x_{+0} = 0, \quad y_{+0} = 1, \quad y_{+0}' = -1$$

の如き値を持つ解、

$$\left. \begin{aligned} x &= -\frac{2}{5}(1 - \varepsilon^{-3t}) \\ y &= \frac{11}{15} - \frac{1}{5}t + \frac{4}{15}\varepsilon^{-3t} \end{aligned} \right\} (t > 0), \dots (V. 51)$$

を得ることも出来るのである。

更に、前節の例の 3). 如き極端な場合を考へる時、與へられた初期條件を強いて  $t=-0$  に於けるものと解釋することの妥當でないことが了解されるのである。

要するに、初期値として  $t=-0$  に於ける値が用ひ得らるるや否やは、實際の物理的問題に當面して初めて決定さるるものであつて、この事に關しては更に第 II 篇に於て再び論ずる所があらう。

### § V. 6. 線型常微分方程式の境界値問題への應用

此の場合の解法に就ては、次に示す一、二の例よりその一端を知り得よう。

例 1).

$$(D^2 - \alpha^2)y = F(t), \quad (a < t < b, \alpha \neq 0), \dots (V. 52)$$

$$t=a \text{ に於て } y=y_a, \dots (V. 53)$$

$$t=b \text{ に於て } y=y_b, \dots (V. 54)$$

を解け。

$$\text{解: (IV. 26) 式の関係により, } p_a^{-1} \cdot \equiv \int_a^t \cdot dt,$$

( $a < t < b$ ) とすれば、

$$D^2 y \equiv p_a^2 y - p_a y_a' - p_a^2 y_a, \\ \left[ \text{こゝに } y_a \equiv \left( \frac{dy}{dt} \right)_a \right]$$

なる故、(V. 52) 式は

$$(p_a^2 - \alpha^2)y = F(t) + p_a y_a' + p_a^2 y_a$$

となる。この兩邊に、 $(p_a^2 - \alpha^2)^{-1}$  を作用させ、(IV. 23) 式を利用すれば、

$$y = \frac{1}{\alpha} \int_a^t \sinh \alpha(t-\tau) F(\tau) d\tau \\ + \frac{1}{\alpha} y_a' \sinh \alpha(t-a) + y_a \cosh \alpha(t-a), \dots (V. 55)$$

を得る。こゝに於て  $t=b$  とおけば、

$$y_b = \frac{1}{\alpha} \int_a^b \sinh \alpha(b-\tau) F(\tau) d\tau \\ + \frac{1}{\alpha} y_a' \sinh \alpha(b-a) + y_a \cosh \alpha(b-a), \dots (V. 56)$$

が得られるから、(V. 55) 式と (V. 56) 式とより  $y_a'$  を逐ひ出せば、所要の解は、

$$y = \frac{1}{\alpha \sinh \alpha(b-a)} \left\{ \sinh \alpha(b-t) \cdot \int_a^t \sinh \alpha(a-\tau) F(\tau) d\tau \right. \\ \left. + \sinh \alpha(a-t) \int_t^b \sinh \alpha(b-\tau) F(\tau) d\tau \right. \\ \left. + \alpha \left[ y_a \sinh \alpha(b-t) - y_b \sinh \alpha(a-t) \right] \right\}, \\ (a < t < b, \alpha \neq 0) \dots (V. 57)$$

の如くなる。これは又  $p_b^{-1} \cdot \equiv \int_b^t \cdot dt$ , ( $a < t < b$ ) を用ひても全く同様にして得られるものである。

例 2).

$$(D^2 - \alpha^2)y = F(t), \quad (a < t < b, \alpha \neq 0), \dots (V. 58)$$

$$t=a \text{ に於て } y=y_a, \dots (V. 59)$$

$$t=b \text{ に於て } y'=y_b', \dots (V. 60)$$

を解け。

$$\text{解: } p_a^{-1} \cdot \equiv \int_a^t \cdot dt, \quad p_b^{-1} \cdot \equiv \int_b^t \cdot dt, \quad (a < t < b)$$

とすれば、先づ、(II. 31) 式により、

$$(D^2 - \alpha^2) \cdot \equiv (D - \alpha)(D + \alpha) \equiv (p_b - \alpha)(D + \alpha) \cdot \\ - p_b C \left( \frac{b}{t} \right) (D + \alpha) \cdot$$

なる故、(V. 58) 式と (V. 60) 式とより、

$$(D + \alpha)y = (p_b - \alpha)^{-1} F(t) \\ + (p_b - \alpha)^{-1} p_b (y_b' + \alpha y_b) \\ = e^{\alpha t} \int_b^t e^{-\alpha t} F(t) dt + (y_b' + \alpha y_b) e^{\alpha(t-b)}, \dots (V. 61)$$

が得られる。更に、

$$(D + \alpha) \cdot \equiv (p_a + \alpha) \cdot - p_a C \left( \frac{a}{t} \right) \cdot$$

を用ひれば、(V. 61) 式及び (V. 59) とより、

$$y = (p_a + \alpha)^{-1} \left\{ e^{\alpha t} \int_b^t e^{-\alpha t} F(t) dt + (y_b' + \alpha y_b) e^{\alpha(t-b)} \right. \\ \left. + p_a y_a \right\} \\ = \frac{1}{\alpha} \left\{ \sinh \alpha(t-a) \int_b^t e^{-\alpha(t-\tau)} F(\tau) d\tau \right. \\ \left. - e^{-\alpha(t-a)} \int_a^t \sinh \alpha(\tau-a) F(\tau) d\tau \right. \\ \left. + (y_b' + \alpha y_b) e^{-\alpha(b-a)} \sinh \alpha(t-a) \right. \\ \left. + \alpha y_a e^{-\alpha(t-a)} \right\}, \dots (V. 62)$$

を得る。従つて此の式で  $t=b$  とおけば、

$$y_b = \frac{1}{\alpha} \left\{ -e^{-\alpha(b-a)} \int_a^b \sinh \alpha(\tau-a) F(\tau) d\tau \right. \\ \left. + (y_b' + \alpha y_b) e^{-\alpha(b-a)} \sinh \alpha(b-a) \right. \\ \left. + \alpha y_a e^{-\alpha(b-a)} \right\}, \dots (V. 63)$$

となるから、(V. 62) 式と (V. 63) 式とより  $y_b$  を逐ひ出せば、所要の解は、

$$y = \frac{1}{\alpha \cosh \alpha(b-a)} \left\{ \cosh \alpha(b-t) \cdot \int_a^t \sinh \alpha(a-\tau) F(\tau) d\tau \right. \\ \left. + \sinh \alpha(a-t) \int_t^b \cosh \alpha(b-\tau) F(\tau) d\tau \right. \\ \left. + \alpha y_a \cosh \alpha(b-t) - y_b' \sinh \alpha(a-t) \right\}, \\ (a < t < b, \alpha \neq 0), \dots (V. 64)$$

の如く得られる。

以上の例に見る如く、境界値問題の演算子解法は、通常解法に於て必要な積分常數決定の手數の一部を簡略に



することがわかる。

### § V. 7. 簡単な線型偏微分方程式解法への應用

これに就ては一つの例を以て説明しよう。

例.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) y = F(x, t), \quad (-\infty < x < \infty, t > a),$$

$$t = a \text{ に於て } y = G(x), \quad (-\infty < x < \infty),$$

.....(V. 65)

を解け。

解: (III 21) 式の関係を利用すれば、

$$\epsilon^{\frac{\partial}{\partial x}} \cdot \equiv C\left(\frac{x+t}{x}\right) \cdot, \quad (-\infty < x < \infty), \quad \dots(V. 66)$$

であるから、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) \cdot \equiv \epsilon^{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial t} \epsilon^{-\frac{\partial}{\partial x}} \cdot$$

$$\equiv C\left(\frac{x+t}{x}\right) \frac{\partial}{\partial t} C\left(\frac{x-t}{x}\right) \cdot$$

$$\equiv C\left(\frac{x+t}{x}\right) p\left(\frac{t}{a}\right) C\left(\frac{x-t}{x}\right) \cdot$$

$$- C\left(\frac{x+t-a}{x}\right) p\left(\frac{t}{a}\right) C\left(\frac{a}{t}\right) \cdot,$$

.....(V. 67)

なることは容易に計算される。従つて、(V. 65) 式は

$$C\left(\frac{x+t}{x}\right) p\left(\frac{t}{a}\right) C\left(\frac{x-t}{x}\right) y = F(x, t)$$

$$+ G(x+t-a) p\left(\frac{t}{a}\right) \cdot 1$$

となるが、この式の兩邊に

$$C\left(\frac{x-t}{x}\right)^{-1} p\left(\frac{t}{a}\right)^{-1} C\left(\frac{x+t}{x}\right)^{-1}$$

を作用せしめ、

$$C\left(\frac{x \pm t}{x}\right)^{-1} \cdot \equiv C\left(\frac{x \mp t}{x}\right) \cdot$$

なることを考慮すれば、所要の解は、

$$y = C\left(\frac{x+t}{x}\right) \int_a^t F(x-t, t) dt + G(x+t-a)$$

$$= \int_a^t F(x+t-\tau, \tau) d\tau + G(x+t-a),$$

.....(V. 68)

となる。

こゝに挙げた例の様に、極めて簡單なる線型偏微分方程式の場合には、本文に於て説明せる演算子法を直接に適用してその解を求むることも出来るが、少しく複雑なる問題にあつては、一般にその直接の適用は困難となつて来る。こゝに於てはじめて Laplace 變換を利用して擴張された演算子法の利用が必要となつて来るのであつて、これに關しては、第 III 篇に於て詳論する豫定である

### 文 献

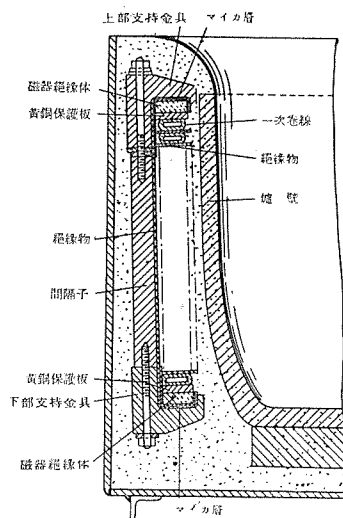
- (14) 文献 (5) を参照の事  
 (15) 林 重 憲: 電評 29. 241 (昭 16)

## 誘導電氣爐の巻線支持装置

(登録實用新案 第 313880 號)

低周波誘導電氣爐に於ける一次巻線は、該巻線の上下兩端に接着せしめた黄銅保護板と、支持金具との間に、「マイカ」絶縁層を介挿して、締付けられ、支持金具による巻線の短絡を防ぐべくせるを普通とするが「マイカ」層は高熱又は震動に耐へずして、往々絶縁を破壊する虞れがあつた。

本案は「マイカ」絶縁層と保護板との間に更らに磁器絶縁体を介在せしめた構造を要旨とするもので、濕氣及高熱に耐へ巻線の多少の變形又は振動にも充分耐へ、締付を強固にする事が出来る。(中野)



# 電動操作油入遮断器投入時間

大 阪 工 場      田      中      薫

## 内 容 梗 概

自動再閉路用、同期機並列投入用等を對照とせる油入遮断器を設計する場合、投入時間を豫め算出することが可能ならば洵に好都合である。然し乍ら、此の問題に對する研究は、從來、あまり發表せられてゐない様である。

筆者は、第一着手として、電動機仕掛操作油入遮断器の投入時間を、次の方式により、實驗式的に求めて見た。

電動機電流を時間  $t$  の函數即ち  $i=f(t)$  の形で表はし、可動部の變位に要するエネルギーを  $W_P$ 、回轉部分の回轉エネルギーを  $W_R$  とすれば、投入に要する全エネルギーに等しい電力が、電動機に流入し終つたときに投入が完了すると云ふ考へから

$$\int_0^T E i dt = E \int_0^T f(t) dt = W_P + W_R$$

茲に  $E$  : 電動機供給電壓

此の式を解いて投入時間  $T$  を求めた。

## 1 緒 言

遮断器の性能を論ずる場合、擧げらるべき要件は種々あるが、自動再閉路方式、同期機並列投入用遮断器を對照とする場合、投入時間の大小は、重要問題の一たるを失はない。

遮断器の投入時間を、豫め正確に算出することは、相當難事の様に思はれるが、先づ手始めとして、CF-O 型電動機仕掛に依り、B-22c 型、15 kV、1200 A 油入遮断器（第1圖）を投入したときのオツシログラム（第3圖）に基き、實驗式的に算出して見た。

## 2 計算方法要旨

今

$W_P$  : 油入遮断器の可動コンタクトを“開”の位置より“閉”の位置に移動させるに要するエネルギー（機構の運動に要するエネルギー、可動コンタクト加速パネを壓縮するに要するエネルギーを含む）

$W_R$  : 遮断器が閉路を完了せる瞬間に於いて、電動機仕掛の回轉部が有する回轉エネルギー

$E$  : 電動機供給電壓

$i$  : 電動機供給電流瞬時値

$T$  : 電動機に電流が流れ始めてから遮断器が閉路を完了する迄の所要時間、

とすれば、電動機に電流が流れ始めてから遮断器が閉路を完了する迄のエネルギー關係は次式にて表される。

$$\int_0^T E i dt = W_P + W_R \quad \cdots \cdots (1)$$

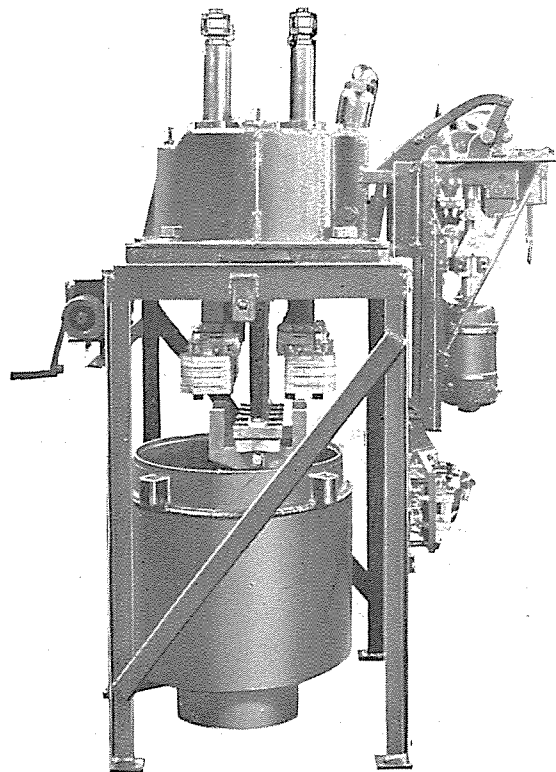
$W_P$ 、 $W_R$  は後に記する如き方法で算出し得るから、(1) 式に於ける  $i$  が、時間  $t$  の函數、即ち  $i=f(t)$  の形で表はし得る場合は、(1) 式を解くことにより、投入時間  $T$  を求めることが出来る。

## 3 $W_P$ の 計 算

第2圖は遮断器を手動にて投入した場合、手動投入棒の端(A點)に於て要する力とストロークの關係を示す。

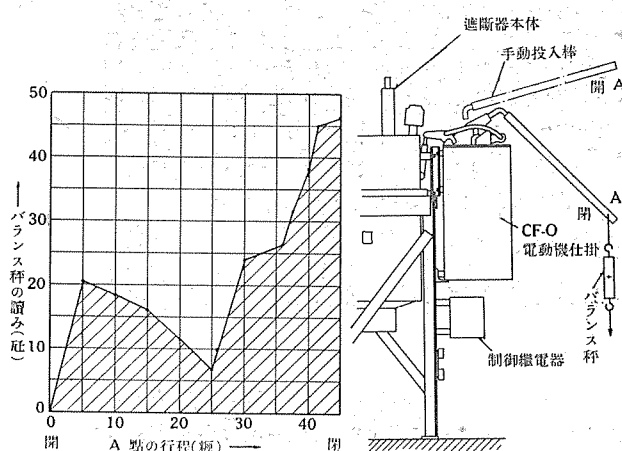
此の圖に於て、斜線を施せる部分の面積は前記の  $W_P$  に相等する仕事量を代表する。

斜線を施せる部分の面積 = 37.6 (方眼數にて)



第 1 圖

B-22 型 油入遮断器  
CF-O 型 電動機仕掛操作



第2圖

目盛より、一方眼内の面積は

$$5 \text{ kg} \times 0.05 \text{ m} = 0.25 \text{ kg-m}$$

を代表する。而して  $1 \text{ kg-m} = 9.8 \text{ ジュール}$  なる故、

$$W_P = 9.8 \times 0.25 \times 37.6 = 92 \text{ ジュール}$$

#### 4 $W_R$ の計算

質量  $M$  なる圓壱が、その軸を中心として、 $\omega$  なる角速度を以て回轉する場合の慣性モーメント  $I$  は

$$I = Mk^2 \quad \dots\dots\dots (2)$$

茲に、

$k$  :— 物體の回轉半径 (Radius of gyration)

而して此の時蓄へられる回轉エネルギーは

$$W = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad \dots\dots\dots (3)$$

電動機仕掛の回轉部分が蓄へる回轉エネルギー  $W_R$  は、電動機仕掛の回轉部分を數個の圓壱と二個の遠心錘に分解して (3) 式に示す  $W$  を算出し、此の總和を求めて算出し得。即ち

$$W_R = \sum \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum I = \frac{1}{2} \omega^2 \sum Mk^2 \quad \dots\dots\dots (4)$$

CF-O 型電動機仕掛が規定回轉數 (4000 r.p.m.) で回轉せる場合につき、此れを計算すれば

$$W_R = 1535 \text{ ジュール}$$

となつた。

#### 5 電動機電流 $i$ の時間的

變化を式にて表すこと、( $i=f(t)$  の構造を探求すること)

第3圖は CF-O 型電動機仕掛に依り、前記の B-22c 型油入遮斷器を投入した場合のオシログラムである。

視察に依り電流の變化は大體次式の如き形で表はし得ることを知る。即ち、

$$i = I_n + (I_s - I_n) \epsilon^{-\alpha t} \quad \dots\dots\dots (5)$$

茲に、

$I_n$  :— 電動機の定常電流 (全負荷電流)

$I_s$  :— 起動電流

$t$  :— 時間

$\alpha$  :— 未知常數

$\epsilon$  :— 自然對數の底數

第3圖に於いては、

$$I_n = 15 \text{ アムペア}$$

$$I_s = 36 \text{ アムペア}$$

$$I_s - I_n = 21 \text{ アムペア}$$

なり。依つて (5) 式は、

$$i = 15 + 21 \epsilon^{-\alpha t} = 15 + 21 \times 10^{-0.4343 t} \quad \dots\dots\dots (6)$$

或は、

$$21 \times 10^{-0.4343 t} = i - 15 \quad \dots\dots\dots (6)'$$

第3圖より、各時間に對する電流を求むれば

$$t=0 \text{ のとき } i=36 \text{ アムペア}$$

$$t=0.1 \text{ のとき } i=25.5 \text{ アムペア}$$

$$t=0.2 \text{ のとき } i=20.5 \text{ アムペア}$$

$$t=0.3 \text{ のとき } i=17.5 \text{ アムペア}$$

此の値を (6)' 式に代入すれば

$$t=0 \text{ のとき } 21 \times 10^0 = 36 - 15 = 21 \quad \dots\dots\dots (7)_A$$

$$t=0.1 \text{ のとき } 21 \times 10^{-0.04343 t} = 25.5 - 15 = 10.5 \quad \dots\dots\dots (7)_B$$

$$t=0.2 \text{ のとき } 21 \times 10^{-0.08686 t} = 20.5 - 15 = 5.5 \quad \dots\dots\dots (7)_C$$

$$t=0.3 \text{ のとき } 21 \times 10^{-0.1303 t} = 17.5 - 15 = 2.5 \quad \dots\dots\dots (7)_D$$

(7) の各式を解いて、 $\alpha$  を求めると、

(7)<sub>B</sub> 式より

$$10^{-0.04343 t} = 10.5/21 = 0.5$$

兩邊の對數を取り

$$-0.04343 \alpha = \log_{10} 0.5 = T.6990$$

$$\therefore \alpha = \frac{0.3010}{0.04343} = 6.95$$

同様に、

$$(7)_C \text{ 式より } \alpha = 6.75$$

$$(7)_D \text{ 式より } \alpha = 7.1$$

以上求めた  $\alpha$  の平均を取ると、

$$\alpha \approx 7$$

となる。これを (6) 式にあてはめると

$$i = 15 + 21 \epsilon^{-7t} \quad \dots\dots\dots (8)$$

これが求むる電流の式である。

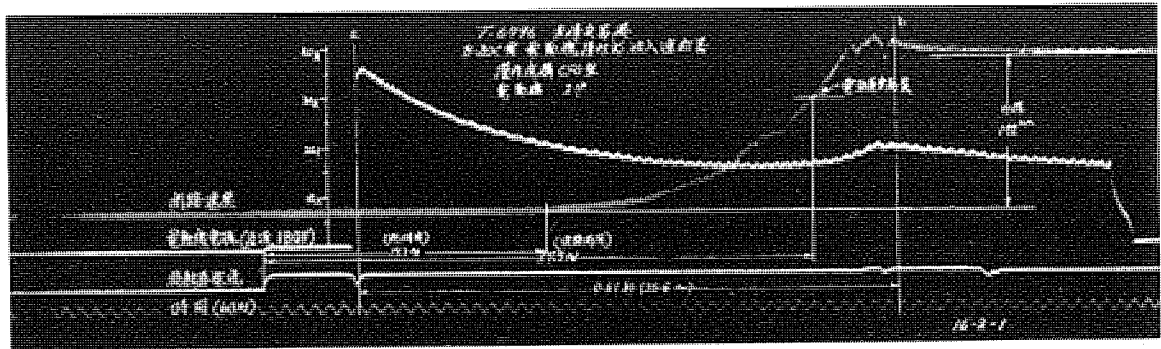
#### 6 投入時間 $T$ の算出

電動機に電流が流れ始めてより時間が経過すると共に電動機に供給されるエネルギーは

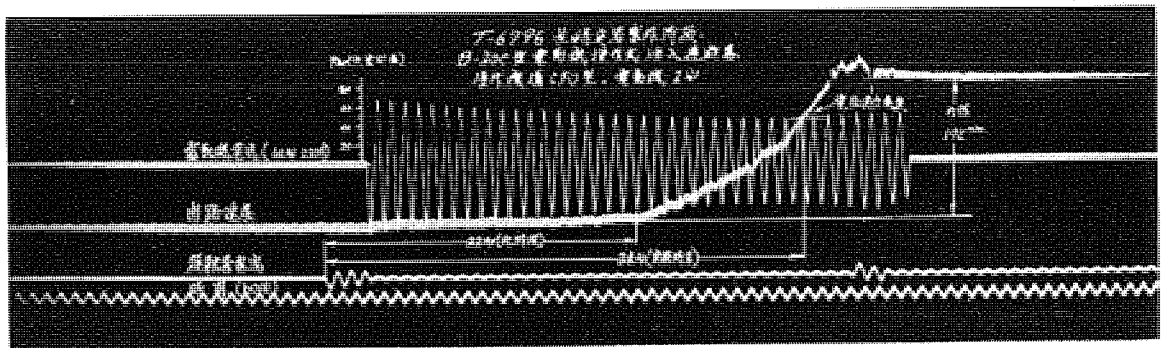
$$\int E i dt = E \int i dt$$

此の式中の  $i$  に (8) 式を代入すれば

$$W = E \int i dt = E \int (15 + 21 \epsilon^{-7t}) dt$$



第 3 圖 B-22C 型油入遮断器投入試験操作機構 CF-O 型電動機仕掛



第 4 圖 B-22C 型油入遮断器投入試験操作機構 CF-O 型電動機仕掛

$$= E(15t + 21e^{-7t} - 7) = E(15t - 3e^{-7t}) \dots (9)$$

他方、投入に要する総エネルギーは、

$$W = W_P + W_R = 92 + 1535 = 1627 \text{ ジュール} \dots (10)$$

(1) 式の考へ方より、

$$E(15t - 3e^{-7t}) = 1627$$

第 3 圖の オシログラム を撮つた際の電圧は 180 ヴォルト なる故

$$15t - 3e^{-7t} = 1627/180$$

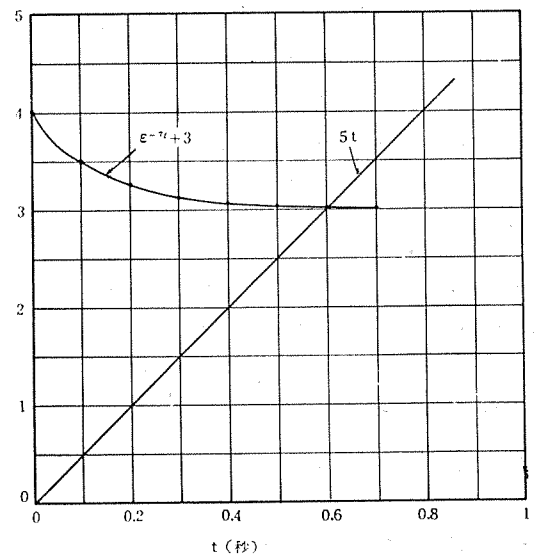
$$e^{-7t} + 3 = 5t \dots (11)$$

(11) 式を圖示すれば第 5 圖の如くなり、此の圖より、

$$t = 0.61 \text{ 秒}$$

を得。

第 3 圖中の ab 間が 0.61 秒にして、實測結果とよく一致せるを知る。



第 5 圖

## 7 結 言

### a. 本計算の有意義性

以上の計算は、既に製品化された遮断器の投入時に於ける電動機電流の オシログラム より、電流変化を示す式を求め、此れに基いて算出した投入時間が、實測の結果と略々一致せることを示すに過ぎないが、本結果は、次の理由に依り、將來設計さるべき電動機仕掛操作遮断器の投入時間の概算を求めるに役立つことを期待するものである。

イ、遮断器の種類が決定すれば所要の投入力が決まる。他方、電動機仕掛の投入力は、遠心錘の重量の大小に依り決定される。従つて、操作機構の構成と、遮断器の種類が決定すれば  $W$  の重さは決まる。(CF-O

型電動機仕掛の投入力計算に就いては昭和 16 年 12 月 號第 295 頁に、小路氏が發表してゐる。)

ロ、遠心錘の重さが決定し、其の形状も決まれば、これを規定の回転數(例へば CF-O 型電動機仕掛にては 4000 r.p.m.) で廻すとき定格速度、定格電流となるが如き整流子電動機が決定される。従つて (5) 式に於ける  $I_s$  及び  $I_n$  が決まる。

ハ、次に  $\alpha$  の決定であるが、CF-O 型電動機仕掛の例に依つても明らかなる如く、 $W_P$  は  $W_R$  に比し殆んど無視し得る程度である。更に、 $W_R$  の中でも、電動機回転子や軸等を附勢するに要するエネルギーは



遠心錘を附勢するために要するエネルギーに比し甚だ少である。(CF-O型電動機仕掛にありては約1:13になつてゐる。)

結局、電動機仕掛に依り遮断器を投入するときに必要なエネルギーは、大部分遠心錘を附勢するために費されることとなり、機構の構成や可動コンタクトの重量等は投入時間には殆んど影響しないと見做し得る。

従つて電動機仕掛の電動機に掛かる負荷は單に、遠心錘のみなりと見做し得る故に、將來、新に設計された電動機仕掛の電動機の起動電流曲線は、遠心錘の大きさが變化しても驅動電動機がそれ相應の大きさのものが取付けられるならば、其の形狀は單に相似的に變化するに過ぎぬことが豫想せられ、(5)式に於ける $\alpha$ の値は略々一定にて $\alpha=7$ なりとして差支へないと思はれる。

かくて(5)式に於ける定数が決定され、 $W_P$ ,  $W_R$ も容易に計算し得る(本例にては $W_P$ は實測してゐるが、計算も可能である)から、新設計の電動機操作遮断器の投入時間が、計算に依り大略の値を豫知することが出来る。

尙、前記の如く、投入に要するエネルギーの大部分は、遠心錘を附勢するために費される。従つて、投入時間を短縮するには、所要投入力の得られる範囲内に於いて遠心錘の重量をなるべく小とすると共に、此のエネルギーを速かに供給する様、起動電流の大なる(従つて容量の大なる)驅動電動機が必要であることが分る。

#### b. 本計算の信頼度について

イ、最も大きな誤差を導入する虞のあるのは遠心錘を附勢するために費されるエネルギーの計算である。

$$\text{回轉エネルギー} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} (m \cdot k^2) \omega^2$$

に於いて、重心位置の決定を誤れば、回轉半径 $k$ の値

が變化し、 $k$ の自乗に比例すべき回轉エネルギーの計算値に大なる誤差を生ず。然るに遠心錘の形狀はかなり不規則で、重心位置の正確なる決定は困難である。

更に遠心錘の重量の計算も困難にして誤差を大ならしむ。

ロ、(5)式中の $\alpha$ の値の大小に依る影響は、第4圖を見れば分る通りあまり大きくない様である。然し此の $\alpha$ の値も今後種々のものに就いて算出し一層妥當性を有する値を發見して見たいと考へて居る。

尙、CF-O型電動機仕掛に附屬の電動機は交直流用整流子電動機で30秒定格にて、2馬力のものであるが、本計算に使用せる第3圖のオシログラムは、電動機に直流を供給せる場合のものである。直流を用ひたのは計算を簡易ならしめんがためである。

然し、實然の使用状態にては、大抵交流が使用される交流使用の場合は、直流使用の場合よりも同一電壓に對して、投入時間が大となるが、此れは、直流使用の場合の時間に或種の係数を乗することにより決定して差支へないと思ふ。此の係数は、實驗的に求めてもよいが、電動機の、交流に對する特性と直流に對する特性を比較することに依つても算出することも可能であると思ふ。

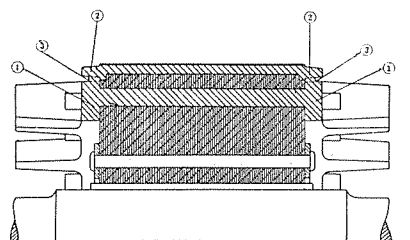
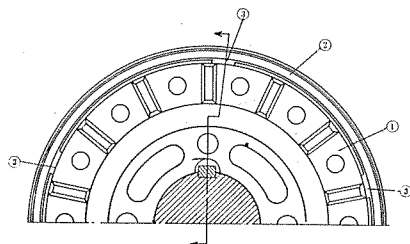
第4圖は、同一遮断器を交流で投入したときのオシログラムであるが、電壓が異なるため、第3圖と第4圖を比較することに依り直に前記の係数を求めることは出来ない

以上、電動機仕掛操作油入遮断器の投入時間を實驗的に算出して見たが、此の研究は未だその緒に就いた許りにて不備の點も多く、更に、他にもつと適當なる計算方法もあること信ずる。殊に筆者固より淺學非才にて本文に於いても種々の偏見、誤謬等のあることを虞れる大方諸賢の御叱正と今後の研究に依り、より完全なものに育て、行きたいと考へてゐる。

## 二重籠型回轉子

(登録實用新案第314339號)

從來鑄込二重籠型回轉子に於ては、導体、短絡環及送風翼等を鑄込むに際し、外側の導体及短絡環と、内側の導体及短絡環とは關聯なきため、湯口を二個所設置するか、又は内外短絡環を一体とし一個所の湯口より鑄込み、後内外短絡環間の金屬を削除せしめたるも、本案は内外短絡環(1)(2)間を連絡路(3)に依り複數個所に於て連絡せしめたるを以て、鑄込に際し一個の湯口を設置するのみにて注湯蒸氣抜けを容易ならしめ、且鑄込み後該連絡路(3)を残存せしむるも、運轉特性に於て連絡路なきものに比し何等の遜色を認めざるものである。(菅野)



## 最近の小型電動機用開閉器

名古屋製作所 堀

敏

## 1 緒 言

工作機の運轉方式は集團運轉方式から色々と變遷進歩して現在では多數電動機運轉方式が盛となり、各々の電動機の容量は小さくなり其れを操作する開閉器類も取付場所が比較的狭い關係上多くは小型のものが要求されると同時に使用回数も頻繁であつて1時間數百回に及ぶものも稀でない。従てこの種開閉器は機械的にも電氣的にも充分なる壽命が要求されその性能の良否は直ちに工作機の性能を左右する様な重大な役割を持つ様になつて來た。

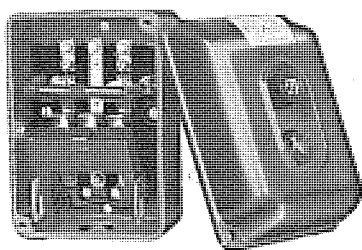
當社も此の如き用途の電機品の改良開發に努め斯界に多くの製品を出してゐるが最近の開發品の内小型開閉器で手動式及び電磁式の次の2種に就いて概略を述べ紹介することとする。

- (1) HK 型押釦起動器 定格 3 $\phi$  250v 5A
- (2) EF 型電磁直入起動器 定格 3 $\phi$  600v 10A

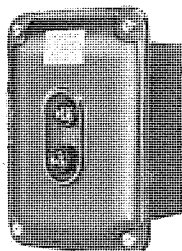
## 2 HK 型押釦起動器

## 種類及構造

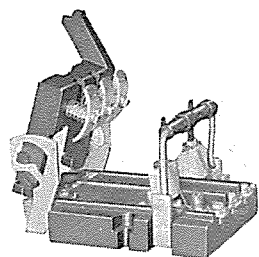
本器は開閉器部分と熱働繼電器部分よりなるものと單に開閉器部分のみのものと2種あり、外觀は全く同じである。第1圖は前者を示す。塗込型の要求に對して第2圖の如きものもある。此れを工作機械等に塗込んで使用する場合に機械との調和をよくする様表板は鑄物製で適當の丸味を持たせる等充分な考慮を拂つてゐる。



第 1 圖  
HK 型押釦起動器



第 2 圖  
HK 型埋込式



第 3 圖  
開閉器部分

操作釦は天秤式になつてゐるから一見して開閉の狀態が明瞭に區別出来る様になつてゐる。

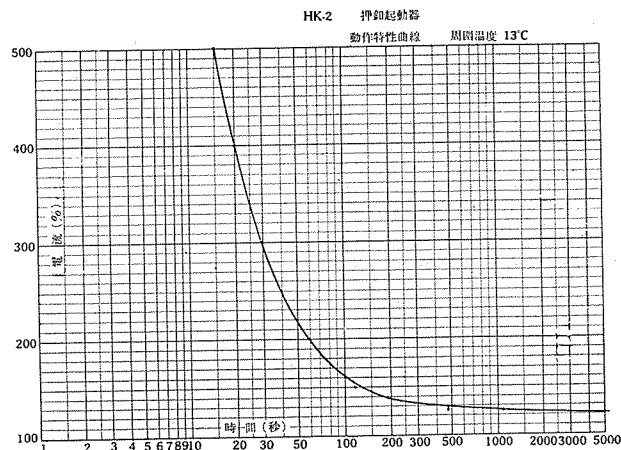
## 開 閉 器

一般に接觸子の接觸壓力は接觸子自身のバネ作用を利用したものと接觸子を別個のバネに依り加壓してゐるものとあるが、震動のある様な場所に使用する場合は後者の構造が望ましい。本器は後者の構造のものであつて硬銅の兩切式接觸子を備へ速斷機構となつてゐるから開路速度が速く消弧を速かにし電弧に依る接觸面の「アレ」熔着、消耗等を防ぎ壽命の點を充分保證してゐる。又可動接觸子が固定接觸子に對し滑り接觸をする様になつてゐるから一旦其の面を拭いて接觸する事になり塵埃等の附着して居る場合其の儘で接觸する事がない。接觸子として銅を使つてゐるが其の銀に對し缺點とする處は固有抵抗は銀と大差なく又接觸抵抗も最初は少しの差異を認めないが銀は接觸面に酸化物が生じててもこの酸化物は良導電性で接觸抵抗は餘り高くないのに反し、銅の酸化物は一旦生じると中々とれなくて非常に高抵抗になる爲永い間使用して居ると電氣傳導が悪くなり接觸子の溫度上昇を來たし熔着現象等を起す虞れがある。然し乍ら本器の様な滑り接觸構造とすれば其等使用中生ずる酸化物或は炭化物を其儘挟み込む等の缺點を除く事が出来る。

可動レバーと受金との掛合は巧妙に出来てゐるから使用中は或る一定の角度しか開かない様になつてゐるが接觸子の點檢、取換を行ひたい場合は第3圖に示す如くレバーを垂直に起すと其等が容易に出来る。

## 熱 働 繼 電 器

本繼電器は傍熱型でバイメタルと加熱子を別個に設けバイメタルの歪に依る押壓を手動引外しと共通のレバーに與へる様にしたものである。加熱子には電動機電流が流れ



第 4 圖

て常規電流ではパイタルに繼電器を動作させる丈の歪を與へないが、過負荷電流に對しては歪大となり引外し機構を動作せしめ開閉器部分の接觸子を開く。第4圖は動作特性曲線である。此の繼電器の特性は反限時性即ち動作する時間は過負荷の大きさに反比例する特性である。それ故起動時に流れる起動電流や瞬時の過負荷では動作せず電動機の溫度上昇に相似の動作特性を持ち電動機の溫度上昇に關聯して動作するから完全な過負荷保護となり且つ電動機の熱容量を充分に利用する事が出来る。

### 3 EF 型電磁直入起動器

#### 構 造

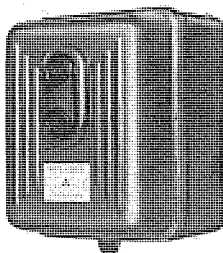
本器は鐵板製の外函の中に電磁接觸器、熱働繼電器、押釦等を納めた電磁直入起動器で操作押釦の頭のみ外函の外部に現はれてゐて操作し易い構造になつてゐる。第5圖は外觀を第6圖は内部を示す。

一般型は直接操作即ち自藏の押釦に依り入切を行ふが遠方操作を行ひたい場合は第6圖に見る端子 8—9 間の絡線を外して、別に1個の押釦を設け所定の接續をすればよい。此場合は遠方押釦と自藏押釦とで何れでも操作出来る。

#### 電 磁 接 觸 器

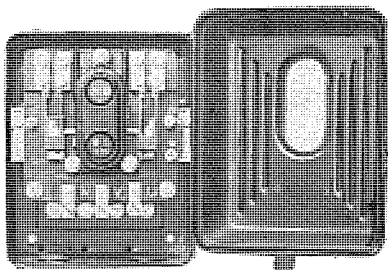
可動接觸部分は固定鐵心保持板にある案内溝を摺動して垂直方向に作動する可動鐵心に自由聯絡されてゐて作動に全然連桿又は軸承を持たない浮動式である爲接觸動作が圓滑で且つ自然的である。又作動方向が垂直であるから外部からの機械的衝擊に對して不用意に接觸子が閉ちる様な事がなく垂直軸に對し  $30^\circ$  位の傾斜に對しても充分確實に動作する特徴がある。

接觸子取付台は固定可動共に絶縁良好なるねりものに



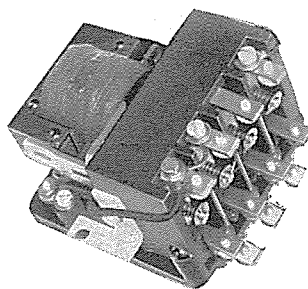
第 5 圖

EF 型電磁直入起動器

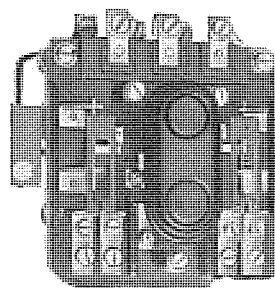


第 6 圖

EF 型 の 内 部



第 7 圖  
電 磁 接 觸 器



第 8 圖  
熱 働 繼 電 器

依り出来て居る。又極間には隔壁を設けて各極が完全に隔絶されてゐるから開閉時接觸點に電弧が生じてもこれが爲他極間に關聯を生ずる如き事がない。従つて、小型に設計されてゐるが絶縁等の點に於ては何等心配はない。第7圖は開閉器の外觀を示す。接觸子は黃銅板に銀の接觸片を點熔接したものを使用してゐる。從來かゝる二つの良導體の點熔接は電流と通電時間の關係から困難とされてゐたが、特殊な熔接装置に依つて時間制御される大型熔接器で點熔接が容易に行はれる様になつた。此の様な銀接觸子を備へた本器は接觸が完全で電氣的機械的に壽命が長く頻繁なる開閉に充分堪へる事が出来電磁接觸器の使命を完全に果してゐる。

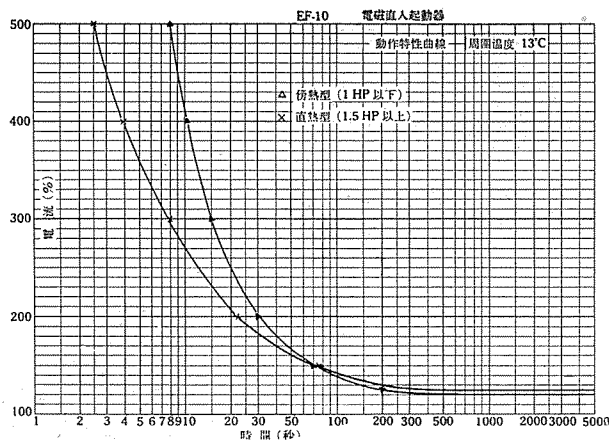
此の接觸器は EF 型電磁直入起動器のみでなく最近是一般制御装置に電磁接觸器として或は繼電器として使用してゐる。一般型は全極閉路式接觸であるが繼電器として使用する場合は必要な極を開路式接觸に簡単に改造し得る。

#### 熱 働 繼 電 器

本器は第8圖に見る如く1個のねりものの台に部分品を取付け別に組立てた押釦とを組合せて成る構造のものである。

先の HK 型の場合はどの容量のものに對しても傍熱型であるが本器は (1 HP 200—220 V) 迄は傍熱型それ以上は直熱型である。傍熱型は加熱子とパイタルとを組合せたものであり直熱型は此の兩者をパイタル自身が兼備したものである。

特性は第9圖の特性曲線の如くである。この曲線で見ると同じ過負荷に對し直熱型の方が動作が早いとその理由はパイタル自身に依る發熱が直ちにパイタルに歪を生ぜしめるが、傍熱型の場合は加熱子に依る輻射熱がパイタルに歪を生ぜしめる事になるから傍熱型の方が時間的に遅れる。



第 9 圖

第 8 圖で解る如く押釦の両側に作動子があつて何れか一方或は兩方同時に作動すれば寫眞には現はれてゐない

が釦の下に設けてある接點に聯動して開路する様になつてゐる。復歸方法は手働式であつて停止兼もどしの釦を押せば再び接點は閉ぢる。此の繼電器は單獨に組立てられてゐるから他の電磁接觸器に組合せて使用する事も出来る。

之等熱動繼電器の缺點は使用中或る一定のワット損失を生ずることであるが此の型は極めて僅かな損失で機能を發揮する様設計されてある。

#### 4 結 言

從來一般動力用開閉器は 15 A とか 30 A とかの定格に設計されたものが多かつたが最近は前述の如く工作機の運轉方式も變つて電動機の容量も小さくなり開閉器類も小型の小容量のものが要求されて來たので、一方用途から一方資材節減の見地から開發した之等の開閉器に就いて概略を述べ紹介した次第である。

### 籠形回轉子導體

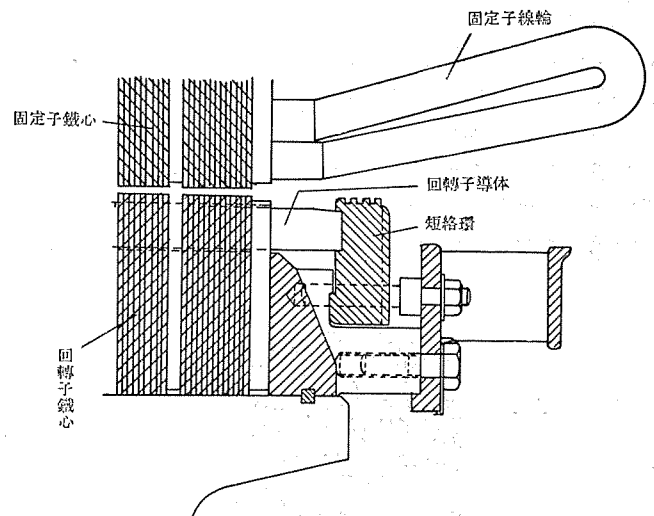
(登録實用新案 第 313440 號)

負荷の慣性大なる「ターボロー」又は電氣爐用高周波發電機用として使用せらるゝ、籠形高速度誘導電動機の回轉子導體は、高速度運轉に對して、遠心力、振動又は衝擊に充分耐へ、且熱膨脹により生ずる應力に對しても安全である事が肝要である。

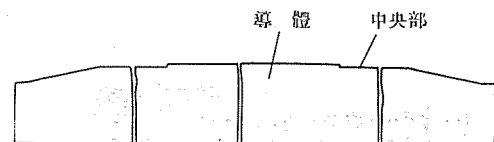
從來は、導體と回轉子鐵心溝との間には、起動時に於ける熱膨脹の影響を考慮して、上下左右僅かの餘裕を附してゐるが、高速運轉に於ては、回轉子導體に加はる遠心力、振動或は衝擊等により、短絡環に對する鐵着部に無理を與へ、導體の龜裂或は鐵着の剝落等を生ぜしめて居る。

本案の導體は、之等の缺點を除去すべく、特種の形狀となしたるものにして、圖に見る如く、兩端部は短絡環の嵌合部を形成し、中央部は其の兩側部に比し僅かに高さ大なる如く形成せられ、之を回轉子鐵心溝に挿入する時は、數金の厚さを加減する事により、回轉子鐵心の中央部に於ては、導體の上下を溝に密着すべくし、兩側部分に於ては、導體上面と溝の上側との間に、僅かの間隙を残す様にしてゐる。

如斯構造により、中央部に於ては、高速運轉時と



第 1 圖



第 2 圖

雖も導體に加はる遠心力、振動或は衝擊を減少し、兩側部に於ては、起動時に於ける短絡環の熱膨脹による半径方向の伸びに對し、導體及鐵着部の強度を充分保有する事が出来る。(中野)

# 整流子焼嵌環初應力の計算に關する一考察

神戸製作所 片岡高示

## 内 容 梗 概

焼嵌環形整流子の環の初應力の計算には環の伸びの問題と整流子の縮みの問題とを同時に考へねばならない。

環の伸びに關しては、一般の厚肉の圓板の問題より歪の計算式を導き、整流子も厚肉の圓板と考へた従来の算式を示した。次に整流子を弾性基礎 (Elastic Foundation) と考へうる帯 (Strip) の集合として、弾性基礎の理論より整流子の縮みの計算式を導いた。弾性基礎と看做して計算した整流子表面の縮みより求めた締代と工場に於ける實測の締代と比較した結果、弾性基礎の式により縮みを計算する事が大体妥當なる見當を得た。依てこの弾性基礎としての式により従来の計算法を檢討し、最後に整流子表面各點の縮みを圖示した。

## I 緒 言

焼嵌環形整流子の環の伸びに關してはこれを厚肉な環と考へて計算する事には問題はないが、整流子の縮みに關しても従來は環として計算されて來たが、整流子は全面にて締められてゐるものではなく、表面上2至4個所にて締められてゐる故にこれはあたかも米俵が繩にて締められた如き形に締められてゐるものとして、整流子の縮みには弾性基礎 (Elastic Foundation) としての式を用ひた。而してこの式により環の締代を假定して初應力を計算する方法を示した。

## II 厚肉な圓板の應力

一般に圓板が中心を通る軸のまわりに回轉してゐる場合各部に作用する遠心力の爲に圓板に應力を生ず。この應力は中心に對して對稱的に分布してゐる。回轉軸方向の應力には變化はないものと假定す。第1圖の如く圓板の一部分の扇形をとりてこれに働く力の平衡を考へると

$$s_r r d\varphi + s_t dr d\varphi - (s_r + \frac{ds_r}{dr} dr) (r + dr) d\varphi - \rho \frac{\omega^2 r}{g} r d\varphi dr = 0 \dots\dots\dots (1)$$

こゝに

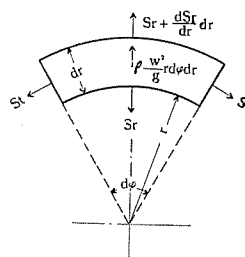
- $s_r$  = 半径方向の應力 (Radial stress)
- $s_t$  = 切線方向の應力 (Tangential stress)
- $\rho$  = 圓板の材料の比重
- $g$  = 重力の加速度
- $\omega$  = 回轉の角速度

(1) 式にて2次以上の微分を無視して整理すれば

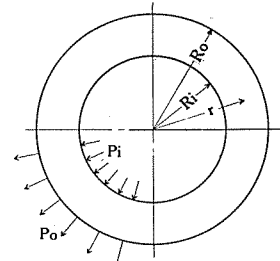
$$s_t - s_r - r \frac{ds_r}{dr} - \rho \frac{\omega^2 r^2}{g} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

次に半径方向の歪 (Radial strain),  $\xi_r$  切線方向の歪 (Tangential strain)  $\xi_t$  は

$$\left. \begin{aligned} \xi_r &= \frac{1}{E} (s_t - \nu s_r) = \frac{\delta}{r} \\ \xi_t &= \frac{1}{E} (s_r - \nu s_t) = \frac{d\delta}{dr} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$



第1圖



第2圖

(2), (3) より  $s_r, s_t$  を求むれば

$$s_r = -\frac{3+\nu}{8} \alpha r^2 + \frac{K_1}{2} - \frac{K^2}{2r^2} \dots\dots\dots (4)$$

$$s_t = -\frac{1+3\nu}{8} \alpha r^2 + \frac{K_1}{2} + \frac{K_2}{2r^2} \dots\dots\dots (5)$$

こゝに

- $E$  = 材料のヤング係数
- $\nu$  = 材料ポアソン比
- $\delta$  = 半径方向の伸び
- $\alpha = \rho \frac{\omega^2}{g}$

$K_1, K_2$  積分常数

今第2圖の如く圓板の内周、外周に静壓力  $p_i, p_o$  が作用した時を考ふれば、 $K_1, K_2$  を定める條件として

$$r = R_o \text{ にて } s_r = p_o$$

$$r = R_i \text{ にて } s_r = -p_i$$

なる故これを (4), (5) に代入して  $K_1, K_2$  を定めると今の場合 Radial stress, Tangential stress は次の如くなる。

$$s_r = \frac{3+\nu}{8} \alpha R_o^2 \left\{ 1 + \left( \frac{R_i}{R_o} \right)^2 - \left( \frac{r}{R_o} \right)^2 - \left( \frac{R_i}{r} \right)^2 \right\} + \frac{R_o^2 p_o + R_i^2 p_i}{R_o^2 - R_i^2} - \frac{p_o + p_i}{R_o^2 - R_i^2} \frac{R_o^2 R_i^2}{r^2} \dots\dots\dots (6)$$

$$s_t = \frac{3+\nu}{8} \alpha R_o^2 \left\{ 1 + \left( \frac{R_i}{R_o} \right)^2 - \frac{1+3\nu}{3+\nu} \left( \frac{r}{R_o} \right)^2 + \left( \frac{R_i}{r} \right)^2 \right\} + \frac{R_o^2 p_o + R_i^2 p_i}{R_o^2 - R_i^2} + \frac{p_o + p_i}{R_o^2 - R_i^2} \frac{R_o^2 R_i^2}{r^2} \dots\dots\dots (7)$$



、又半径方向の伸び  $\delta$  は

$$\delta = \frac{r}{E} (s_t - \nu s_r) \dots\dots\dots (8)$$

(6), (7) 式に於て  $\alpha$  を含む項は圓板の回轉により生ずる遠心力に起因する Dynamic Force による應力を表はし、 $\alpha$  を含まぬ項は  $p_0, p_i$  なる Static Force による應力を表はす。

この一般式を焼嵌環の應力の計算に用ふる爲次の特別なる場合を考ふ。

(1)  $\alpha=0, p_i=p, p_0=0, r=R_i$  なる場合

$$s_t = p \frac{1 + \left(\frac{R_i}{R_o}\right)^2}{1 - \left(\frac{R_i}{R_o}\right)^2}, \quad s_r = -p \dots\dots\dots (9)$$

$$\delta = p \frac{R_i}{E} \left\{ \frac{1 + \left(\frac{R_i}{R_o}\right)^2}{1 - \left(\frac{R_i}{R_o}\right)^2} + \nu \right\} \dots\dots\dots (10)$$

(2)  $\alpha=0, p_0=-p, p_i=0, r=R_o$  なる場合

$$s_t = -p \frac{1 + \left(\frac{R_i}{R_o}\right)^2}{1 - \left(\frac{R_i}{R_o}\right)^2}, \quad s_r = -p \dots\dots\dots (11)$$

$$\delta = p \frac{R_o}{E} \left\{ \frac{1 + \left(\frac{R_i}{R_o}\right)^2}{1 - \left(\frac{R_i}{R_o}\right)^2} - \nu \right\} \dots\dots\dots (12)$$

### Ⅲ 焼嵌環の初應力

第3圖の如く整流子に焼嵌環を嵌めた時環の内周に於ける静應力を  $p_i$  kg/cm<sup>2</sup> とすれば環の半径方向の伸び  $\delta_e$  は (10) 式より、整流子の縮み  $\delta_o$  は (12) 式より夫々次の如くなる。

$$\delta_e = p_i \frac{R_i}{E_e} \left\{ \frac{1 + \left(\frac{R_i}{R_o}\right)^2}{1 - \left(\frac{R_i}{R_o}\right)^2} + \nu_e \right\} \dots\dots\dots (10a)$$

$$\delta_o = p_i \frac{r_o}{E_{eff}} \left\{ \frac{1 + \left(\frac{r_i}{r_o}\right)^2}{1 - \left(\frac{r_i}{r_o}\right)^2} - \nu_{eff} \right\} \dots\dots\dots (12a)$$

こゝに

$E_e$  = 環のヤング係数 (2.11 × 10<sup>9</sup>)

$E_{eff}$  = 整流子のヤング係数

$\nu_e$  = 環のポアソン比 (0.3)

$\nu_{eff}$  = 整流子のポアソン比 (0.25)

尚  $E_{eff}$  は次の如し

$$E_{eff} = \frac{mx + bx}{\frac{mx}{E_m} + \frac{bx}{E_e}} \left\{ \begin{array}{l} m = \text{片間マイカ平均の厚さ} \\ b = \text{整流子片平均の厚さ} \\ x = \text{整流子片の總數} \\ E_m = \text{マイカのヤング係数 (0.0703} \times 10^9) \\ E_e = \text{銅のヤング係数 (1.125} \times 10^9) \end{array} \right.$$

今焼嵌環の縮代 (Allowance of Fit) を  $\Delta$  とすれば (10a) (12a) より、

$$\Delta = \delta_e + \delta_o$$

$$= p_i \frac{R_i}{E_e} \left\{ \frac{1 + \left(\frac{R_i}{R_o}\right)^2}{1 - \left(\frac{R_i}{R_o}\right)^2} + \nu_e \right\} + p_i \frac{r_o}{E_{eff}} \left\{ \frac{1 + \left(\frac{r_i}{r_o}\right)^2}{1 - \left(\frac{r_i}{r_o}\right)^2} - \nu_{eff} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

(13) 式に就いて考ふるに第一項  $\delta_e$  に関しては明らかに厚肉の圓板として出した式 (10) を適用出来るが、整流子の縮み  $\delta_o$  に関しては再検討を要す。即ち整流子の全長にわたつて  $p_i$  が均等に作用してゐるのではなく、全長  $L$  に對して  $L/2$  の部分のみに  $p_i$  が作用してゐる、依てこゝには (12) 式を其のまゝ適用する事は正確ではない。この場合整流子の縮みは (12) にて計算せる値より小さい筈である。依て (13) 式を次の如く變形する。

$$\Delta = p_i \frac{R_i}{E_e} \left\{ \frac{1 + \left(\frac{R_i}{R_o}\right)^2}{1 - \left(\frac{R_i}{R_o}\right)^2} + \nu_e \right\} + k p_i \frac{r_o}{E_{eff}} \left\{ \frac{1 + \left(\frac{r_i}{r_o}\right)^2}{1 - \left(\frac{r_i}{r_o}\right)^2} - \nu_{eff} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

但し  $0 < k < 1$

従つて環の初應力は

$$s_{ei} = p_i \frac{1 + \left(\frac{R_i}{R_o}\right)^2}{1 - \left(\frac{R_i}{R_o}\right)^2} \dots\dots\dots (15)$$

(14), (15) 式により初應力  $s_{ei}$  を假定してそれより縮代  $\Delta$  を、或は縮代を與へて其の時の初應力を計算する事が出来る。

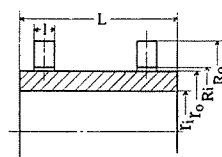
尚  $k$  に関しては後節にて詳述するが  $L/2/L$  に近い値になる事が判つた。

### Ⅳ 弾性基礎 (Elastic Foundation)

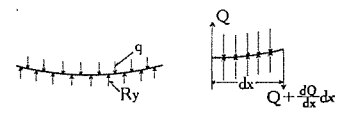
#### と看做した時の整流子の縮み

上述の如く整流子の變形に関してはこれを圓板或は環と考へる事は妥當でないと思はれる故、次に弾性基礎として整流子の縮みを計算する式を導いた。

今第4圖の如く四角なる棒が弾性基礎の上にあつて均一荷重  $q$  を有するものとする。而して Foundation の反作用が各點に於ける變形に比例するものとすれば、其の反作用は  $ky$  となる。こゝに  $y$  は考へてゐる點の變形、 $k$  は單位長の變形により生ずる力で  $k$  は Modulus



第3圖



第4圖

of Foundation と稱せられるものである。

扱梁の微分方程式は、

$$\left. \begin{aligned} EI y'' &= -M \\ EI y''' &= -\frac{dM}{dx} = -Q \\ EI y'''' &= -\frac{d^2M}{dx^2} = -\frac{dQ}{dx} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

第4圖にて力の平衡を考へて

$$q dx + (Q + \frac{dQ}{dx} \cdot dx) - Q - k y dx = 0$$

となる。従つて

$$\frac{dQ}{dx} = k y - q \dots\dots\dots (17)$$

となり。これに (16) を代入して

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = q - k y \dots\dots\dots (18)$$

今均一荷重  $q$  が無い場合を考へて

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -k y \dots\dots\dots (19)$$

となる。これを解けば

$$y = e^{\beta x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C \cos \beta x + D \sin \beta x) \dots\dots\dots (20)$$

或は

$$y = C_1 \cos h \beta x \cos \beta x + C_2 \cos h \beta x \sin \beta x + C_3 \sin h \beta x \cos \beta x + C_4 \sin h \beta x \sin \beta x \dots (20a)$$

こゝに  $\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}$  にして  $A, B, C, D$  或は  $C_1, C_2, C_3, C_4$  は梁の條件により決定さる積分常数である。

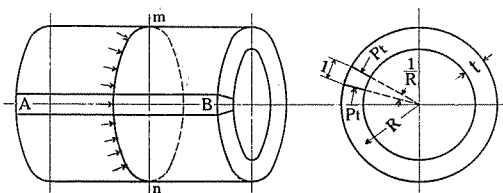
以上の一例として無限長の梁に  $P$  なる荷重のある場合を考へると

(1)  $x = \infty$  では  $e^{\beta x} = \infty$  となる故  $A = B = 0$  となる可し

(2)  $x = \infty$  では  $y = 0$

(3)  $P$  の作用点では梁の傾斜は零なる條件より (20) は次の如く簡単になる

$$y = \frac{P}{8\beta^3 EI} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) \dots\dots\dots (21)$$



第5圖

次にこれを第5圖の如き薄肉の圓筒に應用せんに、圓周上の一部分  $AB$  を考ふ。半径方向の變形を  $y$  とすれば圓周上の歪は

$$\frac{2\pi R - 2\pi(R-y)}{2\pi R} = \frac{y}{R}$$

となる。而して切線方向の力を  $P_t$  とすれば

$$P_t/t = \frac{y}{R} E \quad (t \text{ は肉の厚み})$$

となる故半径方向の力は

$$P_t \cdot \frac{1}{R} = \frac{y}{R^2} E t$$

となり  $k = \frac{Et}{R^2}$  とする時は半径方向の力は  $ky$  となる。

即ち圓筒の場合には Modulus of Foundation  $k$  を  $\frac{Et}{R^2}$

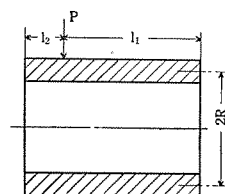
とすれば梁の式 (20), (20a) が其のまゝ使用出来る。然し  $AB$  なる部分は曲げの力により断面が歪まない故半径方向の變形に對して軸方向には變形しないとすれば  $E$

の代りに  $\frac{E}{1-\nu^2}$  を使用して

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k(1-\nu^2)}{4EI}} = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{R^2 t^2}} \dots\dots\dots (22)$$

とした方がよい。

以上は無限長の圓筒に就いてであるがこれを整流子に應用する爲に有限長の長さの場合を考へる。



第6圖

第6圖の如く圓筒の兩端より  $l_1, l_2$  なる一點に  $P$  なる単位圓周長當りの力が作用するとして各點の縮みを求める。

(20a) を再記すれば

$$y = C_1 \cos h \beta x \cos \beta x + C_2 \cos h \beta x \sin \beta x + C_3 \sin h \beta x \cos \beta x + C_4 \sin h \beta x \sin \beta x$$

而して  $\beta$  は (22) に由る。又  $P$  より右に對しては係数は  $C_1 \sim C_4$  を左に對しては  $C_5 \sim C_8$  を使用する。この式の  $C_1 \sim C_8$  の係数を求めるに、 $P$  點にて曲げモーメントを  $M$ 、剪斷應力を  $P$  の右左にて夫々  $P_1, P_2$  とすれば

$l_1$  の部分にて

$$x=0 \text{ にて } y_1'' = -\frac{M}{EI}, y_1''' = \frac{P_1}{EI}, x=l_1 \text{ にて } y_1'' = 0$$

$$y_1''' = 0$$

$l_2$  の部分にて

$$x=0 \text{ にて } y_2'' = -\frac{M}{EI}, y_2''' = \frac{P_2}{EI}, x=l_2 \text{ にて } y_2'' = 0$$

$$y_2''' = 0$$

又  $P = P_1 + P_2$

$$x=0 \text{ にて } y_1' = -y_2' \quad y_1 = y_2$$

より8つの係数を定めると、

$$C_1 = \frac{P}{4EI\beta^3} \frac{2\alpha_3\alpha_3'(\alpha_1+\alpha_1') - \alpha_2'^2\alpha_3 - \alpha_2^2\alpha_3'}{(\alpha_1+\alpha_1')(\alpha_3+\alpha_3') - \frac{(\alpha_2'-\alpha_2)^2}{2}}$$

$$C_2 = \frac{P}{4EI\beta^3} \frac{\alpha_1\alpha_2'\alpha_3 - \alpha_1'\alpha_2\alpha_3' + \alpha_3'(\alpha_1+\alpha_1') + \frac{\alpha_2'(\alpha_2-1)(\alpha_2'-\alpha_2)}{2}}{(\alpha_1+\alpha_1')(\alpha_3+\alpha_3') - \frac{(\alpha_2'-\alpha_2)^2}{2}}$$

$$\begin{aligned}
C_3 &= \frac{P}{4EI\beta^3} \frac{\alpha_1\alpha_2'\alpha_3 - \alpha_1'\alpha_2\alpha_3' - \alpha_3'(\alpha_1 + \alpha_1') + \frac{\alpha_2'(\alpha_2 + 1)(\alpha_2' - \alpha_2)}{2}}{(\alpha_1 + \alpha_1')(\alpha_3 + \alpha_3') - \frac{(\alpha_2' - \alpha_2)^2}{2}} \\
C_4 &= -\frac{P}{4EI\beta^3} \frac{\alpha_2'\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3'}{(\alpha_1 + \alpha_1')(\alpha_3 + \alpha_3') - \frac{(\alpha_2' - \alpha_2)^2}{2}} \\
C_5 &= C_1 \\
C_6 &= \frac{P}{4EI\beta^3} \frac{\alpha_1'\alpha_2\alpha_3' - \alpha_1\alpha_2'\alpha_3 + \alpha_3(\alpha_1 + \alpha_1') + \frac{\alpha_2(\alpha_2' - 1)(\alpha_2' - \alpha_2)}{2}}{(\alpha_1 + \alpha_1')(\alpha_3 + \alpha_3') - \frac{(\alpha_2' - \alpha_2)^2}{2}} \\
C_7 &= \frac{P}{4EI\beta^3} \frac{\alpha_1'\alpha_2\alpha_3' - \alpha_1\alpha_2'\alpha_3 - \alpha_3(\alpha_1 + \alpha_1') - \frac{\alpha_2(\alpha_2' + 1)(\alpha_2' - \alpha_2)}{2}}{(\alpha_1 + \alpha_1')(\alpha_3 + \alpha_3') - \frac{(\alpha_2' - \alpha_2)^2}{2}} \\
C_8 &= C_4 \dots\dots\dots (23)
\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{\sin h\beta l_1 \cos h\beta l_1 + \sin \beta l_1 \cos \beta l_1}{\sin h^2\beta l_1 - \sin^2\beta l_1} \\
\alpha_2 &= \frac{\sin h^2\beta l_1 + \sin^2\beta l_1}{\sin h^2\beta l_1 - \sin^2\beta l_1} \\
\alpha_3 &= \frac{\sin h\beta l_1 \cos h\beta l_1 - \sin \beta l_1 \cos \beta l_1}{\sin h^2\beta l_1 - \sin^2\beta l_1}
\end{aligned} \right\} \dots (24)$$

$\alpha_1' \sim \alpha_3'$  は上式にて  $l_1$  の代りに  $l_2$  としたもの

$$\begin{aligned}
\text{又 } \beta &= \sqrt{\frac{k(1-\nu^2)}{4EI}} \quad k = \frac{Et}{R^2} \\
&= \frac{1.273}{\sqrt{Rt}} \quad (\nu=0.25 \text{ として}) \dots\dots\dots (22a)
\end{aligned}$$

以上は  $l_1, l_2$  共有限上の一般の場合であるが、これを実際の整流子に應用するには次の如き特別な場合を考へばよい。

(1)  $l_1, l_2$  共無限長の場合

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_1' = \alpha_2' = \alpha_3' = 1$$

となり従つて

$$\begin{aligned}
C_1 = C_2 = C_5 = C_6 &= \frac{P}{8EI\beta^3} \quad \text{又} \\
C_3 = C_4 = C_7 = C_8 &= -\frac{P}{8EI\beta^2}
\end{aligned}$$

となる。故に (20a) は次の如く簡単になる

$$y = \frac{P}{8EI\beta^3} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) \dots\dots\dots (25)$$

これは即ち前に述べたる (21) と同一である。こゝで  $P$  の下の縮み  $\delta_0$  は

$$\delta_0 = y_{x=0} = \frac{P}{8EI\beta^3} \dots\dots\dots (26)$$

となる。或は  $\beta$  に (22a) を代入すれば

$$\delta_0 = 0.646 \frac{P}{E_{eff}} \left( \frac{R}{t} \right)^{\frac{3}{2}} \dots\dots\dots (26a)$$

従つて

$$y = \delta_0 e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) \dots\dots\dots (25a)$$

但し  $E_{eff}$  は (12a) に用いた整流子のヤング係数  
 $R, t$  は第5圖の如く整流子の平均半径と肉の厚み

(2)  $l_1$  のみ無限長の場合 ( $l_2$  のみ無限長の場合も同様)

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$$

となり。従つて

$$\left. \begin{aligned}
C_1 = -C_3 &= \frac{P}{4EI\beta^3} \frac{2\alpha_1'\alpha_3' - \alpha_2'^2 + \alpha_3'}{(\alpha_1' + 1)(\alpha_3' + 1) - \frac{(\alpha_2' - 1)^2}{2}} \\
C_2 = -C_4 &= \frac{P}{4EI\beta^3} \frac{\alpha_2' + \alpha_3'}{(\alpha_1' + 1)(\alpha_3' + 1) - \frac{(\alpha_2' - 1)^2}{2}}
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

右側即ち  $l_1$  側に於ける縮みは

$$y = C_1 e^{-\beta x} (\cos \beta x + C_2/C_1 \sin \beta x) \dots\dots\dots (28)$$

今  $C_1' = C_1/\delta_0$  又  $C_2' = C_2/\delta_0$

とすれば、(28) は

$$y = C_1' \delta_0 e^{-\beta x} (\cos \beta x + C_2'/C_1' \sin \beta x) \dots\dots\dots (28a)$$

となる。而して  $\delta_0$  は (26a) より與へられ又  $C_1', C_2'/C_1'$  は (27) より

$$\left. \begin{aligned}
C_1' &= 2 \cdot \frac{2\alpha_1'\alpha_3' - \alpha_2'^2 + \alpha_3'}{(\alpha_1' + 1)(\alpha_3' + 1) - \frac{(\alpha_2' - 1)^2}{2}} \\
C_2'/C_1' &= \frac{\alpha_2' + \alpha_3'}{2\alpha_1'\alpha_3' - \alpha_2'^2 + \alpha_3'}
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27a)$$

となる。尙  $l_2$  が可成り大きくなつて  $C_1' \cong C_2'$  となるときは  $C_2'/C_1' \cong 1$  と考へうる故にこの時は (28a) は

$$y = C_1' \delta_0 e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) \dots\dots\dots (28b)$$

となる。

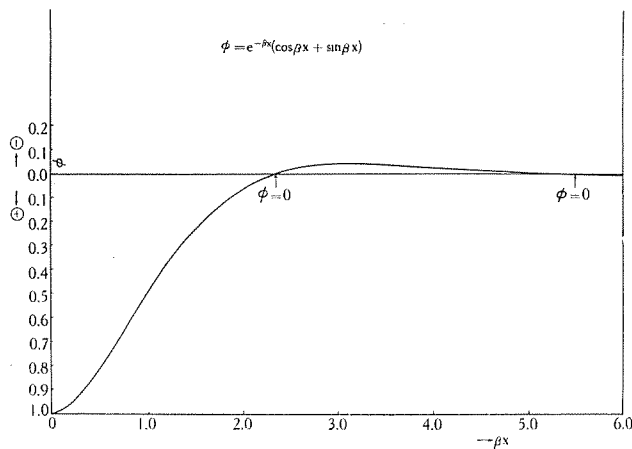
即ちこの場合は (23) 式の  $C_1 \sim C_4$  全部を計算する必要なく (27a) にて  $C_1'$  及  $C_2'/C_1'$  のみ計算すればよい事になる。

(3)  $l_1$  は無限長にして  $l_2$  は 0 の場合 (即ち無限長の圓筒の一端に  $P$  を加へた場合)

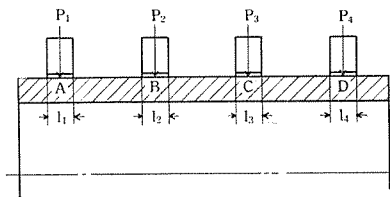
$l_2 = 0$  より

$$\left. \begin{aligned}
C_1 &= \frac{P}{2EI\beta^3} \alpha_3 \\
C_2 &= -\frac{P}{2EI\beta^3} \frac{\alpha_2 - 1}{2} \\
C_3 &= -\frac{P}{2EI\beta^3} \frac{\alpha_2 + 1}{2} \\
C_4 &= 0
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

又  $l_1 = \infty$  なる故  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$  となり (29) は



第 7 圖



第 8 圖

$$C_1 = -C_3 = \frac{P}{2EI\beta^3} = 4\delta_0$$

$$C_2 = C_4 = 0$$

故に

$$y = 4\delta_0 e^{-\beta x} \cos \beta x \quad \dots\dots\dots (30)$$

以上 (3) つの特別の場合を比較すれば、両側無限長の場合の  $P$  の所の縮み  $\delta_0$  に比して、片側のみ無限長の場合には  $P$  の下の縮みは  $C_1$  倍即ち  $C_1' \delta_0$  となる。又無限長の一端に  $P$  を加へた時は  $4\delta_0$  となる事が明らかとなつた。尚 (25a) の各點の縮みの分布を表はす項  $e^{-\beta x}(\cos \beta x + \sin \beta x)$  を圖示すれば第 7 圖の如くなる。

従来当社にて製作せる多くの整流子に就いて計算の結果例へば第 8 圖の如く 4 個の環のある場合には、 $A$  の環に對しては  $l_1 = \infty$ 、 $D$  に對しては  $l_4 = \infty$ 、又  $B, C$  に對しては両側無限長と考へて差支なき事が判つた。依て  $A, D$  に對しては (28a) を、 $B, C$  に對しては (25a) 式を使用しうる事となる。

従つて  $P_1$  による  $A$  點、 $B$  點の縮み  $\delta_{1A}, \delta_{1B}$  は (28a) より

$$\delta_{1A} = C_1' \delta_0$$

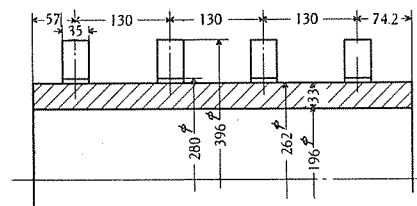
$$\delta_{1B} = y_{x=\overline{AB}} = C_1' \delta_0 e^{-\beta \overline{AB}} (\cos \beta \overline{AB} + C_2'/C_1' \sin \beta \overline{AB})$$

但し  $P_1, P_2$  等は環  $A, B$  等による壓力、 $\overline{AB}$  は環  $A, B$  中央間の距離

$P_1$  による  $C$  點の縮みは無視しうる程度となる。斯くて各壓力による各點の縮みを別々に計算して其等を重疊すれば各力が同時に作用した時の最後の各點の縮みを知る。

## V 實例に就いての計算

先づ前節の式を検討する意味にて環外徑の伸びの實測



第 9 圖

値より計算にて出した環の縮代と、實測の縮代を比較した。即ち環の外徑の伸びの實測値を元にして環の内徑の壓力を計算し、其の壓力による整流子の縮みを IV 節の式により計算し、斯くて求めたる環の縮代と實測の縮代を比較した。

例 1. 第 9 圖の如き寸法の整流子に於ては

$$R_o = 19.8 \quad R = 11.45 \quad Ee_{ff} = 0.413 \times 10^6$$

$$R_i = 14.0 \quad t = 3.3$$

但し  $E_m = 0.0703 \times 10^6$ ,  $E_e = 1.125 \times 10^6$ ,  $E_s = 2.11 \times 10^6$

$$r_o = 13.1 \quad \beta = 0.216 \quad \nu_e = 0.3 \quad \nu_{eff} = 0.25$$

$$r_i = 9.8$$

又焼嵌環の外徑に於ける伸びの實測値 (直徑にて)、及び環の縮代の實測値は次の如くであつた。

	A	B	C	D
環の外徑の伸び (cm)	0.038	0.037	0.044	0.046
環の縮代 (allowance of Fit)	0.095	0.100	0.100	0.083

環外徑の伸びより環内徑の壓力  $p_i$  を求めんに、(6)~

(8) にて  $\alpha = 0$ ,  $p_i = p_i$ ,  $p_o = 0$ ,  $r = R_o$  とすれば

$$p_i = \delta_{R_o} \frac{1}{2} \frac{E}{R_o} \frac{1 - \left(\frac{R_i}{R_o}\right)^2}{\left(\frac{R_i}{R_o}\right)^2} \quad \dots\dots\dots (31)$$

(31) の  $\delta_{R_o}$  に前の伸びの實測値 (但し半徑にて) を代入して各環に於ける壓力  $p_{i1}, p_{i2}$  等を求めれば

$$p_{i1} = 1010 \text{ kg/cm}^2, p_{i2} = 985, p_{i3} = 1170, p_{i4} = 1226$$

となる彈性基礎としての場合即ち (23) の  $P$  は、單位長當りに  $p_i$  なる力が環の中央に集中したものと考ふ可き故に、

$$P_1 = p_{i1} \times 3.5 = 3540 \text{ kg (圓周單位長當り)}$$

$$\text{同様に } P_2 = 3450 \text{ kg}, P_3 = 4100, P_4 = 4300$$

環内徑に於ける伸びは (10a) より

$$\delta_{e1} = 1010 \times \frac{14}{2.11 \times 10^6} \times 3.3 = 0.0221$$

$$\text{同様に } \delta_{e2} = 0.0216, \delta_{e3} = 0.0256, \delta_{e4} = 0.0268$$

次は彈性基礎としての式を用ひて整流子の縮みを計算する。

(1)  $P_1$  のみによる縮み

$A$  點に  $P_1$  が作用する時は  $l_1$  は無限長と考へて差支なし。

$$l_2 = 5.7 \quad \therefore \beta l_2 = 1.23$$

(24) より  $\alpha$  を計算すれば

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1, \alpha_1' = 2.06, \alpha_2' = 2.15, \alpha_3' = 1.67$$

(27a) より

$$C_1' = 1.05 \quad C_2'/C_1' = 0.972 \approx 1$$

依てこの時は (28b) により

$$y_{P1} = 1.05 \delta_{01} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x)$$

$\delta_{01}$  は (26a) より

$$\delta_{01} = 0.646 \times \frac{3540}{0.413 \times 10^6} \left( \frac{11.45}{3.3} \right)^{\frac{3}{2}} = 0.0358 \text{ (cm)}$$

依て  $P_1$  のみによる A 点、B 点の縮み  $\delta_{1A}$ ,  $\delta_{1B}$  は

$$\delta_{1A} = y_{P1}(x=0) = 1.05 \times 0.0358 = 0.0376$$

$$\delta_{1B} = y_{P1}(x=13) = 1.05 \times 0.0358 \times (-0.035) = -0.00132$$

(2)  $P_2$  のみによる縮み

B 点に  $P$  が作用した時は  $l_1$ ,  $l_2$  共無限長と考へてよい。故に (25a) より

$$y_{P2} = \delta_{02} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x)$$

$$\delta_{02} = 0.0348 \quad (\because P_2 = 3450)$$

$P_2$  のみによる B, C, A の縮み  $\delta_{2B}$ ,  $\delta_{2C}$ ,  $\delta_{2A}$  は

$$\delta_{2B} = \delta_{02} = 0.0348$$

$$\delta_{2A} = \delta_{2C} = y_{P2}(x=13) = 0.0348 \times (-0.035) = -0.00122$$

(3)  $P_3$  のみによる縮み

これは (2) の場合と全く同様にして

$$\delta_{3C} = \delta_{03} = 0.0415 \quad (\because P_3 = 4100)$$

$$\delta_{3B} = \delta_{3D} = 0.0415 \times (-0.035) = -0.00145$$

(4)  $P_4$  のみによる縮み

これは (1) に類似の場合で

$$l_2 = \infty \quad l_1 = 7.42 \quad \therefore \beta l_1 = 1.6$$

$$\alpha_1' = \alpha_2' = \alpha_3' = 1 \quad \alpha_1 = 1.32, \alpha_2 = 1.4, \alpha_3 = 1.32$$

$$C_1' = 1.05, C_2'/C_1' \approx 1$$

$$y_{P4} = 1.05 \delta_{04} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x)$$

$$\delta_{04} = 0.0435 \quad (\because P_4 = 4300)$$

$$\delta_{4D} = 1.05 \delta_{04} = 0.0455$$

$$\delta_{4C} = 1.05 \times 0.0435 \times (-0.035) = -0.00159$$

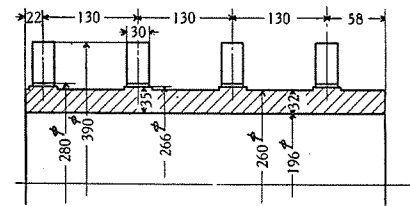
従つて  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$  が同時に作用した時の縮み、及環の伸びより縮代を計算し、これを最初に記した縮代の實測と比較すれば

	A	B	C	D
$P_1$ :	0.0376	-0.0013		
$P_2$ :	-0.0015	0.0348	-0.0015	
$P_3$ :		-0.0015	0.0348	-0.0015
$P_4$ :			-0.0016	0.0455
環の伸び	0.0221	0.0216	0.0256	0.0268
計算による縮代	0.0582	0.0536	0.0573	0.0708
實測による縮代	0.048	0.0500	0.0500	0.0415

以上の計算では (1) 環の下に絶縁マイカは壓力により變形しないと假定してゐる。(2)  $P$  なる力即ち  $l \cdot p_i$  が環の中央に集中して作用するものと假定した。(3) 整流子の實際の形狀は第 9 圖の如く簡單なるものでない (4) 片間マイカのヤング係数  $E_m$  は正確な値を知り難い事、等が計算と實測の一致しない一原因になつてゐるものと思はれる、がこの比較によりこの計算法に可成の信頼度を置いてよきものと思ふ。

次は先づ環の縮代を與へ其の時の環の初應力を計算せん。

[例 2] 第 10 圖の如き整流子に於ては、



第 10 圖

$$R_0 = 19.5 \quad E_{eff} = 0.413 \times 10^8$$

$$R_i = 14 \quad \beta = 0.218$$

$$r_0 = 13$$

$$r_i = 9.8$$

$$R = 11.4$$

$$t = 3.2$$

環内径の初壓力を  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ ,  $p_4$  とすれば各環の内半徑の伸びは (10a) より

$$\delta_{e1} = p_1 \frac{R_i}{E_e} \left\{ \frac{1 + \left( \frac{R_i}{R_0} \right)^2}{1 - \left( \frac{R_i}{R_0} \right)^2} + \nu_e \right\} = 2.17 \times 10^{-5} p_1$$

$$\delta_{e2} = 2.17 \times 10^{-5} p_2 \text{ etc.}$$

次に整流子の縮みは

(1)  $P_1$  のみによる縮み

$$l_1 = \infty, l_2 = 2.2 \quad \therefore \beta l_2 = 0.48$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1, \alpha_1' = 28, \alpha_2' = 13.5, \alpha_3' = 4.25$$

$$C_1' = 1.56, C_2'/C_1' = 0.315$$

(28) より

$$y_{P1} = 1.56 \delta_{01} e^{-\beta x} (\cos \beta x + 0.315 \sin \beta x)$$

$$\delta_{01} = 0.646 \frac{P_1}{E_{eff}} \left( \frac{R}{t} \right)^{\frac{3}{2}} = 3.15 \times 10^{-5} p_1$$

(但し  $P_1 = 3.0 \times p_1$ )

$$\delta_{1A} = 1.56 \delta_{01} = 4.91 \times 10^{-5} p_1$$

$$\delta_{1B} = y_{P1}(x=13) = -0.248 \times 10^{-5} p_1$$

(2)  $P_2$  のみによる縮み

$l_1 = l_2 = \infty$  と考へて

$$y_{P2} = \delta_{02} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x)$$

$$\delta_{02} = 3.15 \times 10^{-5} p_2$$

$$\delta_{2B} = 3.15 \times 10^{-5} p_2$$

$$\delta_{2C} = \delta_{2A} = -0.126 \times 10^{-5} p_2$$

(3)  $P_3$  のみによる縮み

(2) と同様に

$$\delta_{3C} = 3.15 \times 10^{-5} p_3, \delta_{3D} = \delta_{3B} = -0.126 \times 10^{-5} p_3$$

(4)  $P_4$  のみによる縮み

$$l_2 = \infty \text{ と考へて, } l_1 = 5.8 \quad \beta l_1 = 1.265$$

$$\alpha_1' = \alpha_2' = \alpha_3' = 1, \alpha_1 = 1.95, \alpha_2 = 2.04, \alpha_3 = 1.62$$

$$C_1' = 1.05, C_2'/C_1' = 0.97 \approx 1$$

$$\therefore y_{P4} = 1.05 \delta_{04} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x)$$

$$\delta_{4D} = y_{P4}(x=0) = 1.05 \delta_{04} = 3.31 \times 10^{-5} p_4$$

$$\delta_{4C} = -0.132 \times 10^{-5} p_4$$

$P_1 \sim P_4$  が同時に作用した時の整流子の縮み及び環の伸びは



$$\begin{array}{c|cccc} & A & B & C & D \\ \hline \text{整流子の} & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ \text{縮み} & 4.91 p_1 & -0.248 p_1 & & \\ (\times 10^{-5}) & P_2 & -0.216 p_2 & 3.15 p_2 & -0.126 p_2 \\ & P_3 & & -0.126 p_3 & 3.15 p_3 & -0.126 p_3 \\ & P_4 & & & -0.132 p_4 & 3.31 p_4 \\ \hline \text{環の伸び} (\times 10^{-5}) & 2.17 p_1 & 2.17 p_2 & 2.17 p_3 & 2.17 p_4 \\ \hline \end{array}$$
 各環の締代を夫々 0.05 cm (半径にて) とすれば次の 4 ケの方程式を得。

- (1)  $7.08 p_1 - 0.126 p_2 = 0.05 \times 10^5$
- (2)  $-0.248 p_1 + 5.32 p_2 - 0.126 p_3 = 0.05 \times 10^5$
- (3)  $-0.126 p_2 + 5.32 p_3 - 0.132 p_4 = 0.05 \times 10^5$
- (4)  $-0.126 p_3 + 5.48 p_4 = 0.05 \times 10^5$

これ等の四元一次聯立方程式を解きて  $p_1, p_2, p_3, p_4$  を求むれば

$$\begin{array}{ll} p_1 = 730 \text{ kg/cm}^2 & p_3 = 950 \\ p_2 = 995 & p_4 = 935 \end{array}$$

或はこれより (15) により初應力をも求めうる。

次に (14) の  $k$  を検討するため今求めた  $p_i$  を用ひて (14) の  $k$  を逆に求めん、 $p_i$  の最大なる  $B$  環に就いて

$$\Delta = 0.05 \quad p_i = p_2 = 995$$

を (14) に代入すれば (但しこの時は  $r_0 = 13.3$  とす)

$$0.05 = 2.17 \times 10^{-5} \times 995 + k \frac{13.3 \times 3.13}{0.413 \times 10^6} \times 995$$

$$\therefore k = 0.282$$

而して  $\Sigma l/L = 0.256$  但し  $\begin{cases} l = \text{環の軸方向の長さ} \\ L = \text{整流子の全長} \end{cases}$  となる。

$$\text{故に } k = \Sigma l/L \times 1.1 \dots\dots\dots (32)$$

即ち (14) にて  $k$  の値として  $\Sigma l/L \times 1.1$  を採用すれば、整流子を弾性基礎と看做して計算した結果と一致する。

尚別の寸法の實例について計算の結果

$$y_{P1} = 0.0367 e^{-\beta x} (\cos \beta x + 0.315 \sin \beta x)$$

$$y_{P2} = y_{P3} = 0.0329 e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x)$$

$$y_{P4} = 0.0326 e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x)$$

なる場合の各點の縮みを圖示すれば第 11 圖の如し。但し細線は各力  $P_1 \sim P_4$  が別々に單獨に作用せる時、太線は各力が同時に作用した時の縮みを表はす。

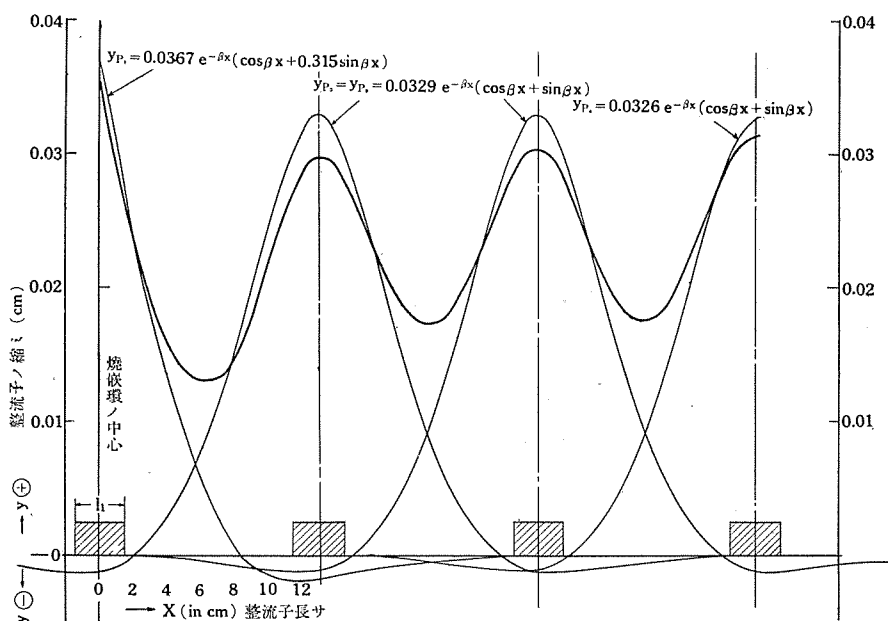
## Ⅵ 結 論

整流子を有限長の 1 個の圓筒として弾性基礎の理論より導いた式により縮みを計算して實測と比較した結果大体近似の値を得た。依てこの弾性基礎としての式により計算せる縮みより逆に、從來使用されてゐた、整流子を厚肉の圓板としての式に導入す可き係数  $k$  を求めると、從來製作の 4 環型整流子では  $k = \Sigma l/L \times 1.1$  となつた。依て焼嵌環の應力の計算には從來の式にて  $k$  を  $\Sigma l/L \times$

1.1 として簡単に計算し得る事が判つた。

以上で本文の目的は終つてゐるが設計上の最後の目的は、回轉狀態に於て整流子の環と環の中間の點が危險なる狀態にならぬ様に初應力及締代を與へる事である。其の爲には環と環の中間の點の縮みを知らねばならない。この中間點の縮みを知る目的に對して弾性基礎としての式は尙重要な意義を有するものと思ふ。この問題に對して將來尙考究致し度いと思つてゐる。

最後に本文の理論式の誘導に當つて當所設計課機械係杉本技師に多大の御指導を賜つた事を深く感謝する次第である。



第 11 圖

## 参 考 文 献

- (1) S. Timoshenko : Applied Elasticity Chap. VI. Bending of Bars on Elastic Foundation
- (2) 小野鑑正 : 材料力學 XXII 圓板の回轉