



# 三菱電機

第 18 卷

昭和 17 年 5 月

第 5 號

## 内 容 目 次

Heaviside 演算法に對する新しい考察と その電氣回路解析に於ける應用 (Ⅱ) .....	147
周波數變調送信機 .....	158
周波數變調受信機 .....	164
電氣 ホイスト 用鐵に就て .....	171

# 三菱電機株式會社



# 三菱電機

第十八卷

昭和十七年五月

第五號

## Heaviside 演算子法に對する新しい考察と その電気回路解析に於ける應用 (Ⅲ)

研究部 菅野正雄

### (Ⅲ) $D$ 及び $D^{-1}$ に關する主なる性質

$D$  及び  $D^{-1}$  に關する種々の演算子的性質は、文献(5)に於ても概略的に論ぜられてゐるが、こゝには今後の説明に必要な主なるものに就き順次説明を加へる。斷りなき限り、領域は  $-\infty < t < \infty$  とする。

#### § III. 1.

$$f(D) \equiv \sum_{k=0}^n a_k D^k, \quad (a_k: \text{常數}, n: \text{有限})$$

を要素とする集合は、四則算法、乗法に關する交換可能なる算法を有すること、因數分解及び二項定理の可能なることはよく知られてゐる通りである。即ち

$$\begin{aligned} f(D) \cdot + g(D) \cdot &\equiv g(D) \cdot + f(D) \cdot \\ &\equiv (f(D) + g(D)) \cdot, \end{aligned}$$

$$f(D)g(D) \equiv g(D)f(D),$$

$$f(D)g(D)h(D) \equiv f(D)(g(D)h(D)),$$

$$\equiv (f(D)g(D))h(D),$$

$$\begin{aligned} f(D) &\equiv a_n(D - \alpha_1)s_1(D - \alpha_2)s_2 \cdots (D - \alpha_r)s_r, \\ &\quad \left( \begin{array}{l} a_n \neq 0, \quad s_1 + s_2 + \cdots + s_r = n, \quad \alpha_r \text{ は } f(x)=0 \\ \text{の } s_r \text{ 重根} \end{array} \right), \end{aligned}$$

$$(D + \alpha)^n \equiv \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^k D^{n-k}.$$

等が成立つ。但し

$$g(D) \equiv \sum_{k=0}^m b_k D^k \quad (m: \text{有限}),$$

$$h(D) \equiv \sum_{k=0}^l c_k D^k \quad (l: \text{有限})$$

とする。

#### § III. 2. 變位定理

$$\S\text{ III. 2. 1. } (D + \varphi(t)) \cdot \equiv \varepsilon^{-\psi(t)} D \varepsilon^{\psi(t)} \cdot, \cdots (\text{III. 1})$$

但し、 $\varphi(t)$  は  $t$  の適宜の函數であり、又

$$\psi(t) \equiv D^{-1}\varphi(t) \equiv \int^t \varphi(t) dt \text{ とする。}$$

證明:

$$D \varepsilon^{\psi(t)} \cdot \equiv \varepsilon^{\psi(t)} D \cdot + (D \varepsilon^{\psi(t)}) \cdot$$

$$\equiv \varepsilon^{\psi(t)} D \cdot + \varphi(t) \varepsilon^{\psi(t)} \cdot$$

$$\equiv \varepsilon^{\psi(t)} (D + \varphi(t)) \cdot$$

この最後の式の兩邊に左側より  $\varepsilon^{-\psi(t)}$  を作用すれば、

$$\varepsilon^{-\psi(t)} D \varepsilon^{\psi(t)} \cdot \equiv (D + \varphi(t)) \cdot, \quad q. e. d.$$

$$\S\text{ III. 2. 2. } (D + \varphi(t))^{-1} \text{ を } (D + \varphi(t)) \text{ の逆演算}$$

子とすれば、(III. 1) 式より直ちに

$$(D + \varphi(t))^{-1} \cdot \equiv (\varepsilon^{-\psi(t)} D \varepsilon^{\psi(t)})^{-1} \cdot$$

$$\equiv \varepsilon^{-\psi(t)} D^{-1} \varepsilon^{\psi(t)} \cdot$$

$$\equiv \varepsilon^{-\psi(t)} \int^t \varepsilon^{\psi(t)} \cdot dt, \cdots (\text{III. 2})$$

なる關係が得られ、こゝに  $(D + \varphi(t))^{-1}$  の演算法が確立されるのである。

$\S\text{ III. 2. 3. } \alpha$  を常數とし、 $f(D)$  を  $D$  の有理整函數とする時、(III. 1) 式及び (III. 2) 式を利用すれば容易に、

$$f(D + \alpha) \cdot \equiv \varepsilon^{-\alpha t} f(D) \varepsilon^{\alpha t} \cdot, \cdots (\text{III. 3})$$

$$f(D + \alpha)^{-1} \cdot \equiv \varepsilon^{-\alpha t} f(D)^{-1} \varepsilon^{\alpha t} \cdot, \cdots (\text{III. 4})$$

なる關係を導くことが出来る。

更に後述の (III. 17) 式を利用すれば、 $f(D)$  が一般に  $D$  の有理函數である場合にも、

$$f(D + \alpha) \cdot \equiv \varepsilon^{-\alpha t} f(D) \varepsilon^{\alpha t} \cdot, \cdots (\text{III. 5})$$

なる關係の成立つことは容易に證明される。(III. 1) 式乃至 (III. 5) 式を  $D$  に關する變位定理と稱する。尙今後斷りなき限り、 $\alpha$  は常數とする。

例 1).

$$\begin{aligned} \frac{1}{D + \alpha} \left\{ \begin{array}{l} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{array} \right\} &\equiv \varepsilon^{-\alpha t} \int^t \varepsilon^{\alpha t} \left\{ \begin{array}{l} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{array} \right\} dt \\ &\equiv \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} \left( \alpha \left\{ \begin{array}{l} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{array} \right\} + \omega \left\{ \begin{array}{l} \sin \omega t \\ -\cos \omega t \end{array} \right\} \right), \\ &\quad (\alpha \neq \pm j\omega) \cdots (\text{III. 6}) \end{aligned}$$

例 2).

$$\begin{aligned} \frac{1}{D+j\omega} \left\{ \begin{array}{l} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{array} \right\} &\equiv \varepsilon^{-j\omega t} \int^t \varepsilon^{j\omega t} \left\{ \begin{array}{l} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{array} \right\} dt \\ &\equiv \frac{1}{2} \left( t \left\{ \begin{array}{l} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{array} \right\} + jt \left\{ \begin{array}{l} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \end{array} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\omega} \left\{ \begin{array}{l} \sin \omega t \\ -\cos \omega t \end{array} \right\} - \frac{j}{2\omega} \left\{ \begin{array}{l} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{array} \right\} \right), \\ &(\omega \neq 0), \dots\dots\dots (III. 7) \end{aligned}$$

## § III. 3. 冪級数展開

## § III. 3. 1.

$$(D-\alpha)^{-1} \equiv -\frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{1}{\alpha} \right)^k D^k + \frac{1}{\alpha^n} (D-\alpha)^{-1} D^n, \quad (\alpha \neq 0), \dots\dots\dots (III. 8)$$

証明:

$(D-\alpha)^{-1} \equiv \varepsilon^{at} D^{-1} \varepsilon^{-at}$  に於て、右邊の  $\varepsilon^{-at}$  に關して順次に部分積分を行へば、

$$\begin{aligned} D^{-1} \varepsilon^{-at} &\equiv -\frac{1}{\alpha} \varepsilon^{-at} - \left( -\frac{1}{\alpha} \right) D^{-1} \varepsilon^{-at} D \\ &\equiv -\frac{1}{\alpha} \varepsilon^{-at} - \left( -\frac{1}{\alpha} \right)^2 \varepsilon^{-at} D \\ &\quad + \left( -\frac{1}{\alpha} \right)^2 D^{-1} \varepsilon^{-at} D^2. \end{aligned}$$

$$\equiv -\frac{1}{\alpha} \varepsilon^{-at} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{1}{\alpha} \right)^k D^k + \frac{1}{\alpha^n} D^{-1} \varepsilon^{-at} D^n.$$

故に、

$$\begin{aligned} (D-\alpha)^{-1} &\equiv -\frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{1}{\alpha} \right)^k D^k \\ &\quad + \frac{1}{\alpha^n} (D-\alpha)^{-1} D^n, \quad q. e. d. \end{aligned}$$

特に、被演算函数を  $F(t)$  とする時、

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k D^k F(t)$$

が収斂なるか、もしくは漸近級数を表はす時は、

$$(D-\alpha)^{-1} \approx -\frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{\alpha} \right)^k D^k, \dots\dots\dots (III. 9)$$

と書いてよいであらう。これを

$$(x-\alpha)^{-1} = -\frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{\alpha} \right)^k x^k, \quad (|x| < |\alpha|)$$

と比較して見ると、(III. 9) 式の如き展開を得るには、恰も  $D$  を代数記號の如く看做してその冪級数に展開したものと同様の形となることがわかるのである。

$$\begin{aligned} \text{例. } (D-\alpha)^{-1} t^s &\equiv \varepsilon^{at} \int^t \varepsilon^{-at} t^s dt \\ &\approx -\frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{\alpha} \right)^k D^k t^s \\ &\approx -\frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{\alpha} \right)^k \frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+s-k)} t^{s-k}, \\ &(\alpha \neq 0), \dots\dots\dots (III. 10) \end{aligned}$$

## §§ III. 3. 2.

$$\begin{aligned} (D-\alpha)^{-n} &\equiv \frac{1}{\Gamma(n)} \frac{\partial^{n-1}}{\partial \alpha^{n-1}} (D-\alpha)^{-1} \\ &\approx \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-\alpha)^{-n-k} D^k \\ &(\alpha \neq 0), \dots\dots\dots (III. 11) \end{aligned}$$

証明:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} (D-\alpha)^{-1} &\equiv \frac{\partial}{\partial \alpha} (\varepsilon^{at} D^{-1} \varepsilon^{-at}) \\ &\equiv t \varepsilon^{at} D^{-1} \varepsilon^{-at} + \varepsilon^{at} \frac{\partial}{\partial \alpha} (D^{-1} \varepsilon^{-at}). \end{aligned}$$

然るに、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} (D^{-1} \varepsilon^{-at}) &\equiv D^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} \varepsilon^{-at} \right) \\ &\equiv D^{-1} (-t \varepsilon^{-at}) \\ &\equiv -t D^{-1} \varepsilon^{-at} + D^{-2} \varepsilon^{-at}. \end{aligned}$$

よつて、(III. 4) 式を用ひれば、

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (D-\alpha)^{-1} \equiv \varepsilon^{at} D^{-2} \varepsilon^{-at} \equiv (D-\alpha)^{-2}.$$

一般には數學的歸納法により、

$$(D-\alpha)^{-n} \equiv \frac{1}{\Gamma(n)} \frac{\partial^{n-1}}{\partial \alpha^{n-1}} (D-\alpha)^{-1}.$$

を證明し得る。こゝで (III. 8) 式を利用すれば、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{n-1}}{\partial \alpha^{n-1}} (D-\alpha)^{-1} &\equiv \Gamma(n) \sum_{k=0}^{m-1} \binom{-n}{k} (-\alpha)^{-n-k} D^k \\ &\quad + \frac{\partial^{n-1}}{\partial \alpha^{n-1}} \alpha^{-m} (D-\alpha)^{-1} D^m, \quad (m > n) \end{aligned}$$

となるから、 $m \rightarrow \infty$  としてもよい場合であれば、

$$(D-\alpha)^{-n} \approx \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-\alpha)^{-n-k} D^k.$$

を得る。この關係式も亦、

$$(x-\alpha)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-\alpha)^{-n-k} x^k, \quad (|x| < |\alpha|)$$

に對應するものである。

$$\begin{aligned} \text{例. } (D-\alpha)^{-n} t^s &\equiv \varepsilon^{at} \int^t \int^t \dots \int^t \varepsilon^{-at} t^s (dt)^n \\ &\approx \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-\alpha)^{-n-k} \frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+s-k)} t^{s-k}, \\ &(\alpha \neq 0), \dots\dots\dots (III. 12) \end{aligned}$$

## § III. 4. 部分分數展開

## § III. 4. 1.

$$\begin{aligned} (D-\alpha_1)^{-1}(D-\alpha_2)^{-1} &\equiv (D-\alpha_2)^{-1}(D-\alpha_1)^{-1} \\ &\equiv \frac{1}{\alpha_1-\alpha_2} \left\{ (D-\alpha_1)^{-1} - (D-\alpha_2)^{-1} \right\}, \\ &\quad (\alpha_1 \neq \alpha_2), \dots \dots \dots (\text{III. 13}) \end{aligned}$$

証明： 變位定理を利用し、然る後部分積分を行へば、

$$\begin{aligned} (D-\alpha_1)^{-1}(D-\alpha_2)^{-1} &\equiv \varepsilon^{a_1 t} D^{-1} \varepsilon^{-a_1 t} \varepsilon^{a_2 t} D^{-1} \varepsilon^{-a_2 t} \\ &\equiv \varepsilon^{a_1 t} \left\{ -(\alpha_1-\alpha_2)^{-1} \varepsilon^{-(a_1-a_2)t} D^{-1} \varepsilon^{-a_2 t} \right. \\ &\quad \left. + (\alpha_1-\alpha_2)^{-1} D^{-1} \varepsilon^{-(a_1-a_2)t} \varepsilon^{-a_2 t} \right\} \\ &\equiv \frac{1}{\alpha_1-\alpha_2} \left\{ (D-\alpha_1)^{-1} - (D-\alpha_2)^{-1} \right\}. \end{aligned}$$

同様にして、

$$\begin{aligned} (D-\alpha_2)^{-1}(D-\alpha_1)^{-1} &\equiv \frac{1}{\alpha_2-\alpha_1} \left\{ (D-\alpha_2)^{-1} \right. \\ &\quad \left. - (D-\alpha_1)^{-1} \right\} \\ &\equiv \frac{1}{\alpha_1-\alpha_2} \left\{ (D-\alpha_1)^{-1} - (D-\alpha_2)^{-1} \right\}, \quad q. e. d. \end{aligned}$$

## §§ III. 4. 2.

$$\begin{aligned} (D-\alpha_2)^{-1}(D-\alpha_1) &\equiv (D-\alpha_1)(D-\alpha_2)^{-1} \\ &\equiv 1 + (\alpha_2-\alpha_1)(D-\alpha_2)^{-1}, \\ &\quad \dots \dots \dots (\text{III. 14}) \end{aligned}$$

証明：

$$\begin{aligned} (D-\alpha_2)^{-1}(D-\alpha_1) &\equiv (D-\alpha_2)^{-1}(D-\alpha_2+\alpha_2-\alpha_1) \\ &\equiv 1 + (\alpha_2-\alpha_1)(D-\alpha_2)^{-1}, \\ (D-\alpha_1)(D-\alpha_2)^{-1} &\equiv (\alpha_2-\alpha_1+D-\alpha_2)(D-\alpha_2)^{-1} \\ &\equiv 1 + (\alpha_2-\alpha_1)(D-\alpha_2)^{-1}, \\ &\quad q. e. d. \end{aligned}$$

さて、(III. 13) 式及び (III. 14) 式の関係は、代數學に於ける

$$\begin{aligned} (x-\alpha_1)^{-1}(x-\alpha_2)^{-1} &= \frac{1}{\alpha_1-\alpha_2} \\ &\quad \left\{ (x-\alpha_1)^{-1} - (x-\alpha_2)^{-1} \right\}, \dots \dots \dots (\text{III. 15}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)^{-1} &= 1 + (\alpha_2-\alpha_1)(x-\alpha_2)^{-1}, \\ &\quad \dots \dots \dots (\text{III. 16}) \end{aligned}$$

に對應するものであつて、此の場合も、 $D$ を恰も代數記號の如く取扱つてよいことがわかるのである。

§§ III. 4. 3. 一般に (III. 13) 式及び (III. 14) 式を利用すれば

$$\begin{aligned} f_1(D) &\equiv \prod_{k=1}^l (D-\alpha_k)^{r_k}, \quad f_2(D) \equiv \prod_{m=1}^n (D-\beta_m)^{s_m} \\ &\quad \left( \text{但し } N = \sum_{m=1}^n s_m \leq \sum_{k=1}^l r_k = L \right) \end{aligned}$$

とすれば、

$$\varphi(D) \equiv f_2(D) f_1(D)^{-1} \equiv f_1(D)^{-1} f_2(D).$$

$$\begin{aligned} &\equiv \delta_{N,L} + \sum_{k=1}^l \sum_{r=1}^{r_k} A_{kr} (D-\alpha_k)^{-r} \\ &\equiv \delta_{N,L} + \sum_{k=1}^l \sum_{r=1}^{r_k} A_{kr} \varepsilon^{a_k t} D^{-r} \varepsilon^{-a_k t}, \\ &\quad \dots \dots \dots (\text{III. 17}) \end{aligned}$$

なることを證明することが出来る。こゝに、

$$\begin{aligned} A_{kr} &\equiv \frac{1}{(r_k-r)!} \left[ \frac{d^{r_k-r}}{dx^{r_k-r}} \left\{ (x-\alpha_k)^{r_k} \varphi(x) \right\} \right]_{x=\alpha_k} \\ \delta_{N,L} &\equiv \begin{cases} 1, & N=L \\ 0, & N \neq L \end{cases} \end{aligned}$$

例 1).

$$\begin{aligned} \frac{1}{D^2+\alpha^2} \left\{ \cos \omega t \right\} &\equiv \frac{1}{2j\alpha} \left( \frac{1}{D-j\alpha} - \frac{1}{D+j\alpha} \right) \left\{ \cos \omega t \right\} \\ &\quad \left( (\text{III. 6}) \text{ 式を利用して} \right) \equiv \frac{1}{\alpha^2-\omega^2} \left\{ \frac{\cos \omega t}{\sin \omega t} \right\}, \quad (\alpha^2 \neq \omega^2) \end{aligned}$$

従つて、一般に、 $f(-\omega^2) \neq \infty$  ならば、

$$f(D^2) \left\{ \frac{\cos \omega t}{\sin \omega t} \right\} \equiv f(-\omega^2) \left\{ \frac{\cos \omega t}{\sin \omega t} \right\}, \dots \dots (\text{III. 18})$$

が導かれる。

例 2). (III. 7) 式を利用すれば、

$$\begin{aligned} \frac{1}{D^2+\omega^2} \left\{ \cos \omega t \right\} &\equiv \frac{1}{2j\omega} \left( \frac{1}{D-j\omega} - \frac{1}{D+j\omega} \right) \left\{ \cos \omega t \right\} \\ &\equiv \frac{1}{2\omega} \left[ t \left\{ \frac{\sin \omega t}{-\cos \omega t} \right\} + \frac{1}{2\omega} \left\{ \cos \omega t \right\} \right], \\ &\quad (\omega \neq 0), \dots \dots \dots (\text{III. 19}) \end{aligned}$$

## § III. 5. 變移演算子と定差演算子

$|\alpha|$  が充分小さく、

$$F(t) + \frac{\alpha}{1!} \frac{dF(t)}{dt} + \frac{\alpha^2}{2!} \frac{d^2F(t)}{dt^2} + \dots \dots \dots$$

が收斂するとすれば、Taylor の定理により

$$\begin{aligned} F(t+\alpha) &\equiv F(t) + \frac{\alpha}{1!} \frac{dF(t)}{dt} + \frac{\alpha^2}{2!} \frac{d^2F(t)}{dt^2} + \dots \\ &\equiv \left( 1 + \frac{\alpha}{1!} D + \frac{\alpha^2}{2!} D^2 + \dots \right) F(t) \end{aligned}$$

を得る。所で、

$$\varepsilon^{a x} \equiv 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha^2}{2!} x^2 + \dots \dots \dots$$

なる故、

$$\varepsilon^{a D} \equiv \left( 1 + \frac{\alpha}{1!} D + \frac{\alpha^2}{2!} D^2 + \dots \right), \dots \dots (\text{III. 20})$$

と書くこととすれば、上式は

$$F(t+\alpha) \equiv \varepsilon^{a D} F(t) \quad * (\text{脚註})$$

となる。

然るに一方

$$\begin{aligned} F(t+\alpha) &\equiv C \binom{t+\alpha}{t} F(t) \\ &\quad \left( \text{但し } C \binom{u}{t} \text{ は } F(u) \equiv C \binom{u}{t} F(t) \text{ の如く} \right. \\ &\quad \left. \text{獨立變數 } t \text{ を } u \text{ に變更する作用子である。} \right) \end{aligned}$$

\* 脚註： 此の關係はすでに Gregory: Camb. Math. J. (1) 2, (1841) に論ぜられてある。

であるから、

$$\varepsilon^{\alpha D} \equiv C\left(\begin{matrix} t+\alpha \\ t \end{matrix}\right) \cdot, \dots\dots\dots(\text{III. 21})$$

なる関係が得られる。この (III. 21) 式の関係は  $|\alpha|$  が充分小さいとして導かれたものであるが、冪級数展開に關する解析接続の考へ<sup>(12)</sup> から、實は  $\alpha$  が任意の實數値であつても猶成立し得るのである。而して (III. 21) 式より明かな如く、 $\varepsilon^{\alpha D}$  は變數  $t$  を  $\alpha$  だけ増加して  $t+\alpha$  に變更させる故、これを變移演算子とも稱へられよう。特に  $t$  が時間變數を表はす時は、これを時間變移演算子 (簡單には變時演算子) と云へる。明かに次の関係が成立つ。

$$\varepsilon^{-\alpha D} \equiv C\left(\begin{matrix} t+\alpha \\ t \end{matrix}\right)^{-1} \equiv C\left(\begin{matrix} t-\alpha \\ t \end{matrix}\right) \equiv C\left(\begin{matrix} t \\ t+\alpha \end{matrix}\right) \cdot, \dots\dots\dots(\text{III. 22})$$

こゝに注意すべきことは、 $f(D)$  を  $D$  の有理函數とする時、一般には

$$f(D) \varepsilon^{\alpha D} \neq \varepsilon^{\alpha D} f(D) \cdot, \dots\dots\dots(\text{III. 23})$$

なることである。たとへば、

$$D^{-2} \varepsilon^{\alpha D} t \equiv D^{-2} (t+\alpha) \equiv \frac{1}{6} t^3 + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

なるに對し、

$$\varepsilon^{\alpha D} D^{-2} t \equiv \varepsilon^{\alpha D} \frac{1}{6} t^3 \equiv \frac{1}{6} (t+\alpha)^3$$

であるが如きである。

尙こゝに導いた變移演算子  $\varepsilon^{\alpha D}$  は所謂補間法 (Interpolation) に於て用ひられる定差演算子  $\Delta_a$  及び  $\delta_a$  と密接な關係がある。即ち

$$F(t+\alpha) - F(t) \equiv \Delta_a F(t),$$

$$F(t) - F(t-\alpha) \equiv \delta_a F(t)$$

であるから、

$$\Delta_a \equiv (\varepsilon^{\alpha D} - 1) \cdot, \dots\dots\dots(\text{III. 24})$$

$$\delta_a \equiv (1 - \varepsilon^{-\alpha D}) \cdot, \dots\dots\dots(\text{III. 25})$$

なる關係がある。

### § III. 6. 變移演算子に關する變位定理

(III. 5) 式中の  $f(D)$  が  $\varepsilon^{\beta D}$  ( $\beta$ : 實常數) なる變移演算子なる場合も、(III. 5) 式の變位定理は猶成立する。何となれば、

$$\varepsilon^{\beta(D+\alpha)} \equiv \varepsilon^{\beta\alpha} \varepsilon^{\beta D} \equiv \varepsilon^{-\alpha t} \varepsilon^{\alpha(t+\beta)} \varepsilon^{\beta D} \cdot \\ \equiv \varepsilon^{-\alpha t} \varepsilon^{\beta D} \varepsilon^{\alpha t} \cdot, \dots\dots\dots(\text{III. 26})$$

であるからである。

\* 脚註: ある集合が、次の四つの性質を有する時、それは數學的に群を作ると云ふ。

(i). 結合可能なること。

(ii). 結合法則 (associative law) の成立すること。

$$\text{即ち } A \cdot B + C \equiv A \cdot (B+C) \equiv (A+B) \cdot C, \\ ABC \equiv A(BC) \equiv (AB)C.$$

等の成立つこと。

(iii). 單位要素なるものが存在すること。

(iv). 各要素に對して、その逆要素なるものが存在する事。

### § III. 7.

第 III 章に於て説明せる所を要約すれば次の如くなる。

$$(1). f_n(D) \equiv \sum_{k=0}^n a_k D^k \cdot (a_k: \text{常數}, n: \text{有限})$$

を要素とする集合は加法及び乗法に關して可換群\* (脚註) を作る。(この群を  $D$ -群と名附ける)。

(2).  $D$ -群の演算子算法の基礎は

$$D \equiv \frac{d}{dt} \cdot, \quad D^{-1} \equiv \int \cdot dt$$

及び變位定理

$$f_n(D+\alpha) \equiv \varepsilon^{-\alpha t} f_n(D) \varepsilon^{\alpha t} \cdot$$

とにある。

(3).  $f_n(D)$  の因數分解、二項定理及び  $f_n(D)^{-1}$  の部分分數展開等はすべて  $D$  を代數記號の如く看做して計算した時と全く同一の形となる。

### (IV) $P$ 及び $P^{-1}$ に關する主なる性質

$p$  に關する演算子算法の中には、 $D$  に關する演算子算法に類似のものと然らざるものとあり、兩者を判然と區別しておく必要があるのである。以下に説明する諸關係は斷りなき限り  $-\infty < t < \infty$  に於て成立つものである。

§ IV. 1.  $\alpha$  を常數とすれば、

$$\alpha p \equiv p \alpha \cdot, \dots\dots\dots(\text{IV. 1})$$

即ち、常數と演等子  $p$  とは交換可能である。

證明: 周知の如く、

$$p^{-1} \alpha \equiv \alpha p^{-1} \cdot$$

この式の兩邊に、左側及び右側より  $p$  を作用せしめ、(II. 28) 式の關係を参照すれば所要の結果を得る。

$$\S \text{ IV. 2. } f(p^{-1}) \equiv \sum_{k=0}^n a_k p^{-k} \cdot, (a_k: \text{常數}, n: \text{有限})$$

とする時は、§ III. 1. に於て説明したと同様の關係が、單に  $D$  を  $p^{-1}$  に置換して得られる。

$$\text{又 } f(p) \equiv \sum_{k=0}^n a_k p^k \cdot, (n: \text{有限}) \text{ とする時も、同様に } \S \text{ III. 1. の關係が、單に } D \text{ を } p \text{ に置換して得られることは容易にわかる。たとへば}$$

$$(p+\alpha_1)(p+\alpha_2) \equiv p(1+\alpha_1 p^{-1})p(1+\alpha_2 p^{-1}) \cdot \\ \equiv p^2(1+\alpha_1 p^{-1})(1+\alpha_2 p^{-1}) \cdot$$

以上の外に、一つの群に屬する任意の二つの要素  $A, B$  に就き、

$$(v). A \cdot B \equiv B \cdot A \cdot$$

ならば、この群は加法に關し交換可能なりと云ひ、又

$$(vi). AB \equiv BA \cdot$$

ならば、この群は乗法に關し、交換可能なりと云ふ。故にある要素の集合が、加法及び乗法に關して可換群を作ると云へば、それは上記の六つの性質をことごとく満足してゐることを意味するのである。

$$\begin{aligned} &\equiv p^2(1+\alpha_2 p^{-1})(1+\alpha_1 p^{-1}) \cdot \\ &\equiv (p+\alpha_2)(p+\alpha_1) \cdot \end{aligned}$$

及び

$$\begin{aligned} &(p+\alpha_1)(p+\alpha_2) \cdot \\ &\equiv p^2 \left\{ 1 + (\alpha_1 + \alpha_2) p^{-1} + \alpha_1 \alpha_2 p^{-2} \right\} \cdot \\ &\equiv p^2 \cdot + (\alpha_1 + \alpha_2) p \cdot + \alpha_1 \alpha_2 \cdot \end{aligned}$$

等の如くである。

§ IV. 3.  $u$  及び  $v$  を夫々  $t$  の適宜の函数とすれば

$$D(uv) \equiv u Dv + v Du$$

であるが、一般には

$$p(uv) \equiv u p v + v p u$$

ではない。何となれば、

$$\begin{aligned} \text{左邊} &\equiv p(uv) \equiv D(uv) + p C \left( \frac{a}{t} \right) (uv) \\ &\equiv D(uv) + p u(a) v(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{右邊} &\equiv u p v + v p u \equiv u Dv + v Du \\ &\quad + u p v(a) + v p u(a) \\ &\equiv D(uv) + u p v(a) + v p u(a) \end{aligned}$$

であるから、 $u(a) \equiv 0$ ,  $v(a) \equiv 0$  ならざる限り

$$p(uv) \neq u p v + v p u$$

である。

従つて、 $p$  に關する演算子算法中には、Leibniz の定理、

$$D^n(uv) \equiv \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (D^k u) (D^{n-k} v)$$

に相應する定理は存在しない。

#### § IV. 4. 變位定理

§§ IV. 4. 1.  $(p+\varphi(t)) \cdot \equiv \varepsilon^{-\psi(t)} p \varepsilon^{\psi(t)} \cdot, \dots$  (IV. 2)

$$\left( \text{但し、} \psi(t) \equiv D^{-1} \varphi(t) \equiv \int^t \varphi(t) dt \right).$$

證明： この關係の證明は、 $D$  に對する同様の關係の證明程簡單ではないが、たとへば次の如くすることが出来る。先づ、

$$\begin{aligned} &(p+\varphi(t)) \cdot \equiv \varepsilon^{-\psi(t)} p \varepsilon^{\psi(t)} \cdot \\ &\quad + p(1-p^{-1} \varepsilon^{-\psi(t)} p \varepsilon^{\psi(t)}) \cdot + \varphi(t) \cdot \end{aligned}$$

と書く。然るに、 $p^{-1} \varepsilon^{-\psi(t)} p \varepsilon^{\psi(t)}$  に部分積分を施し、 $p^{-1} p \cdot \equiv 1 \cdot$  を考慮すれば、

$$\begin{aligned} &p^{-1} \varepsilon^{-\psi(t)} p \varepsilon^{\psi(t)} \cdot \equiv \varepsilon^{-\psi(t)} p^{-1} p \varepsilon^{\psi(t)} \cdot \\ &\quad - p^{-1} (D \varepsilon^{-\psi(t)}) \varepsilon^{\psi(t)} \cdot \\ &\equiv 1 \cdot + p^{-1} \varphi(t) \cdot \end{aligned}$$

であるから、

$$p(1-p^{-1} \varepsilon^{-\psi(t)} p \varepsilon^{\psi(t)}) \cdot + \varphi(t) \cdot \equiv 0 \cdot$$

となる。従つて、§ II. 7. に於ける所論から、零演算子は除外して差支へない故、

$$(p+\varphi(t)) \cdot \equiv \varepsilon^{-\psi(t)} p \varepsilon^{\psi(t)} \cdot$$

を得るのである。

§§ IV. 4. 2. (IV. 2) 式より直ちに、

$$\begin{aligned} &(p+\varphi(t))^{-1} \cdot \equiv \varepsilon^{-\psi(t)} p^{-1} \varepsilon^{\psi(t)} \cdot \\ &\quad \equiv \varepsilon^{-\psi(t)} \int_a^t \varepsilon^{\psi(t)} \cdot dt, \dots \dots \dots \text{(IV. 3)} \end{aligned}$$

が得られ、 $(p+\varphi(t))^{-1} \cdot$  の演算法が確定せられるのである。

§§ IV. 4. 3.  $\alpha$  を常數とすれば、 $D$  の場合と同様に、 $f(p)$  を  $p$  の有理整函数とする時、

$$f(p+\alpha) \cdot \equiv \varepsilon^{-\alpha t} f(p) \varepsilon^{\alpha t} \cdot, \dots \dots \dots \text{(IV. 4)}$$

$$f(p+\alpha)^{-1} \cdot \equiv \varepsilon^{-\alpha t} f(p)^{-1} \varepsilon^{\alpha t} \cdot, \dots \dots \dots \text{(IV. 5)}$$

を得る。

更に後述の (IV. 21) 式の關係を利用すれば、 $f(p)$  が一般に  $p$  の有理函数である場合にも、

$$f(p+\alpha) \cdot \equiv \varepsilon^{-\alpha t} f(p) \varepsilon^{\alpha t} \cdot, \dots \dots \dots \text{(IV. 6)}$$

が成立つことは容易に證明される。(IV. 2) 式乃至 (IV. 6) 式の關係を  $p$  に關する變位定理と稱する。

#### § IV. 5. 部分積分

$$\begin{aligned} p^{-1} F(t) \cdot &\equiv \sum_{k=0}^{\infty} (-)^k \left( D^k F(t) \right) p^{-(k+1)} \cdot, \\ &\dots \dots \dots \text{(IV. 7)} \end{aligned}$$

證明： 部分積分より、

$$\begin{aligned} p^{-1} F(t) \cdot &\equiv F(t) p^{-1} \cdot - p^{-1} (D F(t)) p^{-1} \cdot \\ &\equiv F(t) p^{-1} \cdot - (D F(t)) p^{-2} \cdot \\ &\quad + p^{-1} (D^2 F(t)) p^{-2} \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\equiv \sum_{k=0}^{n-1} (-)^k \left( D^k F(t) \right) p^{-(k+1)} \cdot + (-)^n p^{-1} \\ &\quad (D^n F(t)) p^{-n} \cdot \end{aligned}$$

であるが、こゝで  $F(t)$  は領域  $(\alpha, t)$  内で

$$|D^n F(t)| < N \alpha^n, \quad (\alpha, N \text{ は充分大なる正數})$$

とし、又被演算函数を  $G(t)$  とする時、 $G(t)$  は領域  $(\alpha, t)$  に於て積分可能と考ふべき故、

$$|p^{-1} G(t)| < M, \quad (M \text{ は充分大なる正數})$$

である。よつて、

$$|p^{-1} (D^n F(t)) p^{-n} G(t)| < M N \left| \frac{\alpha^n (t-\alpha)^n}{n!} \right|$$

となる。故に、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |p^{-1} (D^n F(t)) p^{-n} G(t)| \equiv 0 \cdot$$

従つて、(IV. 7) 式の關係が得られる。

#### § IV. 6. 冪級數展開

§§ IV. 6. 1.

$$(p-\alpha)^{-1} \cdot \equiv p^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha p^{-1})^k \cdot, \dots \dots \dots \text{(IV. 8)}$$

証明： 變位定理によれば、

$$(p-\alpha)^{-1} \equiv \varepsilon^{at} p^{-1} \varepsilon^{-at}.$$

であるが、この式の右邊の  $p^{-1} \varepsilon^{-at}$  に (IV.7) 式を適用すれば、

$$F(t) \equiv \varepsilon^{-at}, \quad D^k F(t) \equiv (-)^k \alpha^k \varepsilon^{-at}$$

であるから、

$$(p-\alpha)^{-1} \equiv p^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha p^{-1})^k.$$

を得る。q. e. d.

これを、

$$(x-\alpha)^{-1} = x^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha x^{-1})^k, \quad (|x| > |\alpha|)$$

と比較する時、上の  $p^{-1}$  の冪級数展開に於ては、 $p$  を恰も代數記號の如く取扱つてよいことがわかるのである。併しこゝに注意すべきことは、(III.9) 式に相應して、

$$(p-\alpha)^{-1} \simeq -\frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k p^k.$$

なる關係は得られないことである。

#### §§ IV.6.2.

$$\begin{aligned} (p-\alpha)^{-n} &\equiv \frac{1}{\Gamma(n)} \frac{\partial^{n-1}}{\partial \alpha^{n-1}} (p-\alpha)^{-1}. \\ &\equiv p^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} (-)^k \binom{-n}{k} (\alpha p^{-1})^k, \\ &\quad (n=1, 2, 3, \dots), \dots \dots (IV.9) \end{aligned}$$

証明： 前半は  $D$  に關する類似の關係式

(III.11) 式の前半) の場合と全く同様にして證明される。後半は (IV.8) 式を利用すれば、次の如く證明出来る。即ち

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{n-1}}{\partial \alpha^{n-1}} (p^{-1})^{-1} &\equiv \frac{\partial^{n-1}}{\partial \alpha^{n-1}} \left( p^{-1} \sum_{h=0}^{\infty} (\alpha p^{-1})^h \right). \\ &\equiv \frac{\partial^{n-1}}{\partial \alpha^{n-1}} \left\{ p^{-1} \left( \sum_{h=0}^{n-2} + \sum_{h=n-1}^{\infty} \right) (\alpha p^{-1})^h \right\}. \\ &\equiv p^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\partial^{n-1}}{\partial \alpha^{n-1}} \alpha^{k+n-1} \right) p^{-k}. \\ &\equiv p^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} (-)^k \binom{-n}{k} (\alpha p^{-1})^k, \quad q. e. d. \end{aligned}$$

#### § IV.7.

$$\begin{aligned} (p-\alpha)^{-n} &\equiv (D-\alpha)^{-n}. \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \left[ \frac{\partial^{n-1}}{\partial \alpha^{n-1}} \varepsilon^{at} C \left( \frac{a}{t} \right) D^{-1} \varepsilon^{-at} \right], \\ &\quad (n=1, 2, 3, \dots), \dots \dots (IV.10) \end{aligned}$$

証明： 先づ

$$(p-\alpha)^{-1} \equiv (D-\alpha)^{-1} - \varepsilon^{at} C \left( \frac{a}{t} \right) D^{-1} \varepsilon^{-at}.$$

を證明する。變位定理を利用して、

$$(p-\alpha)^{-1} \equiv \varepsilon^{at} p^{-1} \varepsilon^{-at}.$$

$$\equiv \varepsilon^{at} \left[ D^{-1} - C \left( \frac{a}{t} \right) D^{-1} \right] \varepsilon^{-at}.$$

$$\equiv (D-\alpha)^{-1} - \varepsilon^{at} C \left( \frac{a}{t} \right) D^{-1} \varepsilon^{-at}.$$

次にこの兩邊に  $\frac{1}{\Gamma(n)} \frac{\partial^{n-1}}{\partial \alpha^{n-1}}$  を作用し、(IV.9) 式

及び (III.11) 式の前半を考慮すれば、直ちに (IV.10) 式が得られる。

更に、(III.11) 式の後半の關係が用ひられる場合は、

$$\begin{aligned} (p-\alpha)^{-n} &\simeq \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-\alpha)^{-n-k} D^k. \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \frac{\partial^{n-1}}{\partial \alpha^{n-1}} \left[ \varepsilon^{at} C \left( \frac{a}{t} \right) D^{-1} \varepsilon^{-at} \right], \\ &\quad (n=1, 2, 3, \dots), \dots \dots (IV.11) \end{aligned}$$

となる。此の結果により、さきに舉げた (I.19) 式及び (I.20) 式の矛盾は容易に解決されるのである。即ち變位定理よりは、

$$(p+\alpha)^{-1} \equiv \varepsilon^{-at} \int_a^t \varepsilon^{at} dt \equiv \frac{1}{\alpha} (1 - \varepsilon^{-a(t-a)}),$$

(IV.8) 式よりは、

$$\begin{aligned} (p+\alpha)^{-1} \equiv p^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha p^{-1})^k \cdot 1 \\ \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k (t-a)^{k+1}}{(k+1)!} \equiv \frac{1}{\alpha} (1 - \varepsilon^{-a(t-a)}), \end{aligned}$$

(IV.11) 式よりは、

$$(p+\alpha)^{-1} \equiv \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{-1}{\alpha} \right)^k D^k \cdot 1$$

$$= \varepsilon^{-at} C \left( \frac{a}{t} \right) D^{-1} \varepsilon^{at} \cdot 1 \equiv \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{a} \varepsilon^{-a(t-a)}$$

の如く、當然乍ら、何れも同一の結果が得られるのである。尚、(IV.11) 式は漸近展開可能な函數の漸近級数を求むるに便利な關係である。

例 1).  $n=0, 1, 2, \dots$ ,  $a=0$  とすれば、

$$\begin{aligned} (p-\alpha)^{-1} t^n &\equiv -\frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^k} D^k t^n \\ &= -\varepsilon^{at} C \left( \frac{0}{t} \right) D^{-1} \varepsilon^{-at} t^n \\ &\equiv -\frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\alpha^k} \frac{n!}{(n-k)!} t^{n-k} + \frac{n!}{\alpha^{n+1}} \varepsilon^{at} \\ &\equiv \frac{n!}{\alpha^{n+1}} \left\{ \varepsilon^{at} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} (\alpha t)^{n-k} \right\}, \\ &\quad \dots \dots (IV.12) \end{aligned}$$

然るに一方、

$$t^n \equiv n! p^{-n} \cdot 1.$$

よつて、

$$\begin{aligned}(p-\alpha)^{-1}t^n &\equiv n! (p-\alpha)^{-1}p^{-n} \cdot 1 \\ &\equiv n! p^{-n} (p-\alpha)^{-1} \cdot 1 \\ &\equiv \frac{n!}{\alpha} p^{-n} \varepsilon^{at} - \frac{t^n}{\alpha}, \dots \dots (IV.13)\end{aligned}$$

従つて、(IV.12) 式と (IV.13) 式とを比較すれば

$$p^{-n} \varepsilon^{at} \equiv \frac{1}{\alpha^n} \left( \varepsilon^{at} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} (\alpha t)^{k-1} \right), \quad (\alpha \neq 0), \dots \dots (IV.14)$$

例 2).  $n=1, 2, 3, \dots$ .  $-1 < s < 0$ ,  $a=0$  とする時、

$$(p-\alpha)^{-n} t^s \equiv \varepsilon^{at} \int_0^t \dots \int_0^t \varepsilon^{-at} t^s (dt)^n$$

の漸近展開:

(IV.11) 式を  $t^s$  ( $-1 < s < 0$ ) に作用すれば、

$$\begin{aligned}(p-\alpha)^{-n} t^s &\sim \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-\alpha)^{-n-k} \frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+s-k)} t^{s-k} \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(n)} \frac{\partial^{n-1}}{\partial \alpha^{n-1}} \left[ \varepsilon^{at} C \left( \frac{0}{t} \right) D^{-1} \varepsilon^{-at} t^s \right]\end{aligned}$$

となるが、右邊第二項に (II.22) 式を適用すれば、

$$-\varepsilon^{at} C \left( \frac{0}{t} \right) D^{-1} \varepsilon^{-at} t^s \equiv \Gamma(1+s) \frac{\varepsilon^{at}}{\alpha^{1+s}}.$$

故に、

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\Gamma(n)} \frac{\partial^{n-1}}{\partial \alpha^{n-1}} \left[ \varepsilon^{at} C \left( \frac{0}{t} \right) D^{-1} \varepsilon^{-at} t^s \right] \\ \equiv \varepsilon^{at} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{-n}{k} (-\alpha)^{-n-k-1} \frac{\Gamma(n-k+s)}{k!(n-k)!} \frac{t^k}{\alpha^{n-k+s}}\end{aligned}$$

となるから、結局、

$$\begin{aligned}(p-\alpha)^{-n} t^s &\equiv \varepsilon^{at} \int_0^t \dots \int_0^t \varepsilon^{-at} t^s (dt)^n \\ &\sim \varepsilon^{at} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{-n}{k} (-\alpha)^{-n-k-1} \frac{\Gamma(n-k+s)}{k!(n-k)!} \frac{t^k}{\alpha^{n-k+s}} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-\alpha)^{-n-k} \frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+s-k)} t^{s-k}, \quad (-1 < s < 0), \dots \dots (IV.15)\end{aligned}$$

が得られる。この式で  $\alpha=1$ ,  $n=1$ ,  $s=-\frac{1}{2}$ ,  $t>0$  とすれば、さきに述べた (I.26) 式の  $\sqrt{\pi}$  倍が得られる。その際にも説明した如く、従来のように、 $p \equiv \frac{d}{dt}$  として、

$$(p-\alpha)^{-n} \sim \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-\alpha)^{-n-k} \left( \frac{d}{dt} \right)^k, \quad \dots \dots (IV.16)$$

としたのでは、(IV.15) 式の右邊第一項が出て来ないのである。たまたま、 $\alpha < 0$  の場合は、 $t$  が充分大なる時、 $at$  を含む項が速かに零に近づくので見掛け上、(IV.16) 式を用ひて

$$(p-\alpha)^{-n} t^s \sim \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-\alpha)^{-n-k} \frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+s-k)} t^{s-k}, \quad (-1 < s < 0)$$

としても差支へない様に思へるが、それは單に偶然の僥倖にも似た結果であつて、 $\alpha < 0$  の場合は勿論、 $\alpha = j\omega$  ( $\omega$ : 實常數) の様な場合には、もはや上の如き書き方はなし得ないのである。

#### § IV.8.

$$p^{-1} F(t) p C \left( \frac{a}{t} \right) \equiv F(a) C \left( \frac{a}{t} \right) \equiv C \left( \frac{a}{t} \right) F(t).$$

(但し  $F(a)$  は存在するものとする。),  $\dots$  (IV.17)

證明: 部分積分を行へば、

$$\begin{aligned}p^{-1} F(t) p C \left( \frac{a}{t} \right) &\equiv F(t) p^{-1} p C \left( \frac{a}{t} \right) \\ &\quad - p^{-1} (DF(t)) C \left( \frac{a}{t} \right) \\ &\equiv F(t) C \left( \frac{a}{t} \right) - (F(t) - F(a)) C \left( \frac{a}{t} \right) \\ &\equiv F(a) C \left( \frac{a}{t} \right) \\ &\equiv C \left( \frac{a}{t} \right) F(t), \quad q. e. d.\end{aligned}$$

#### § IV.9. 部分分數展開

##### §§ IV.9.1.

$$\begin{aligned}(p-\alpha_1)^{-1} (p-\alpha_2)^{-1} &\equiv (p-\alpha_2)^{-1} (p-\alpha_1)^{-1} \\ &\equiv \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \left\{ (p-\alpha_1)^{-1} - (p-\alpha_2)^{-1} \right\}, \quad (\alpha_1 \neq \alpha_2), \dots \dots (IV.18)\end{aligned}$$

證明: 先づ變位定理を利用し、然る後、部分積分を行へば、

$$\begin{aligned}(p-\alpha_1)^{-1} (p-\alpha_2)^{-1} &\equiv \varepsilon^{a_1 t} p^{-1} \varepsilon^{-a_1 t} \varepsilon^{a_2 t} p^{-1} \varepsilon^{-a_2 t} \\ &\equiv -\frac{\varepsilon^{a_1 t}}{\alpha_1 - \alpha_2} \left\{ \varepsilon^{-(a_1 - a_2)t} p^{-1} \varepsilon^{-a_2 t} \right\}_a^t \\ &\quad - p^{-1} \varepsilon^{-(a_1 - a_2)t} D p^{-1} \varepsilon^{-a_2 t} \\ &\equiv -\frac{\varepsilon^{a_1 t}}{\alpha_1 - \alpha_2} \left\{ \varepsilon^{-(a_1 - a_2)t} p^{-1} \varepsilon^{-a_2 t} \right. \\ &\quad \left. - C \left( \frac{a}{t} \right) \varepsilon^{-(a_1 - a_2)t} p^{-1} \varepsilon^{-a_2 t} \right. \\ &\quad \left. - p^{-1} \varepsilon^{-(a_1 - a_2)t} \left[ p p C \left( \frac{a}{t} \right) \right] p^{-1} \varepsilon^{-a_2 t} \right\} \\ &\equiv -\frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \left\{ \varepsilon^{a_2 t} p^{-1} \varepsilon^{-a_2 t} - \varepsilon^{a_1 t} p^{-1} \varepsilon^{-a_1 t} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varepsilon^{a_1 t}}{\alpha_1 - \alpha_2} \left\{ C \left( \frac{a}{t} \right) \varepsilon^{-(a_1 - a_2)t} p^{-1} \varepsilon^{-a_2 t} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - p^{-1} \varepsilon^{-(a_1 - a_2)t} p C \left( \frac{a}{t} \right) p^{-1} \varepsilon^{-a_2 t} \right\} \right\}, \quad \dots \dots (IV.19)\end{aligned}$$

を得るが、(IV.17) 式の関係を利用すれば、

$$\begin{aligned}p^{-1} \varepsilon^{-(a_1 - a_2)t} p C \left( \frac{a}{t} \right) p^{-1} \varepsilon^{-a_2 t} \\ \equiv C \left( \frac{a}{t} \right) \varepsilon^{-(a_1 - a_2)t} p^{-1} \varepsilon^{-a_2 t},\end{aligned}$$



であるから、(IV. 19) 式の右邊中、

$$C\left(\frac{a}{t}\right) \varepsilon^{-(a_1-a_2)t} p^{-1} \varepsilon^{-ast} - p^{-1} \varepsilon^{-(a_1-a_2)t} \cdot \\ \cdot p C\left(\frac{a}{t}\right) p^{-1} \varepsilon^{-ast} \equiv 0.$$

である。故に

$$(p-\alpha_1)^{-1} (p-\alpha_2)^{-1} \cdot \\ \equiv \frac{1}{\alpha_1-\alpha_2} \left\{ (p-\alpha_1)^{-1} \cdot - (p-\alpha_2)^{-1} \cdot \right\}.$$

全く同様にして、

$$(p-\alpha_2)^{-1} (p-\alpha_1)^{-1} \cdot \\ \equiv \frac{1}{\alpha_2-\alpha_1} \left\{ (p-\alpha_2)^{-1} \cdot - (p-\alpha_1)^{-1} \cdot \right\} \\ \equiv \frac{1}{\alpha_1-\alpha_2} \left\{ (p-\alpha_1)^{-1} \cdot - (p-\alpha_2)^{-1} \cdot \right\}, \\ q. e. d.$$

#### §§ IV. 9. 2.

$$(p-\alpha_2)^{-1} (p-\alpha_1) \cdot \equiv (p-\alpha_1) (p-\alpha_2)^{-1} \cdot \\ \equiv 1 \cdot + (\alpha_2-\alpha_1) (p-\alpha_2)^{-1} \cdot, \\ \dots\dots\dots (IV. 20)$$

この関係は、 $D$  に関する類似の関係、(III. 14) 式の場合と全く同様にして導ける。

さて、(IV. 18) 式及び (IV. 20) 式は、代数学に於ける (III. 15) 式及び (III. 16) 式の關係に對應するものであつて、 $D$  の場合と同様に、 $p$  の有理函數を部分分數に展開する時、恰も  $p$  を代數記號の如く取扱つてもよいといふことが判明するのである。こゝにも從來の  $H$ -法に於ける考へ方と相違する重要な點があるのである。 $H$ -即ち法に於ては、 $p$  を代數記號の如く看做して計算を進め、然る後  $p^{-1} \cdot \equiv \int_0^t \cdot dt$  とおいて見ると多くの場合、他の方法によつて得られた結果と一致すると述べてゐるわけであるが、第 I 章に於ても説明した如く、かゝる蓋然的考察は、種々の誤謬を招く懼があるのである。(IV. 8) 式、(IV. 18) 式及び (IV. 20) 式等の關係の證明を俟つてはじめて “ $p$  の代數化” の意味が明瞭となるのである。

#### §§ IV. 9. 3 一般に (IV. 18) 式及び (IV. 20) 式を

利用して、 $D$  の場合の (III. 17) 式に相當して

$$\varphi(p) \cdot \equiv f_2(p) f_1(p)^{-1} \cdot \equiv f_1(p)^{-1} f_2(p) \cdot \\ \equiv \delta_{N,L} \cdot + \sum_{k=1}^l \sum_{r=1}^{r_k} A_{kr} (p-\alpha_k)^{-r} \cdot \\ \equiv \delta_{N,L} \cdot + \sum_{k=1}^l \sum_{r=1}^{r_k} A_{kr} \varepsilon^{a_k t} p^{-r} \varepsilon^{-a_k t} \cdot, \\ \dots\dots\dots (IV. 21)$$

が得られる。但し、

$$f_1(p) \cdot \equiv \prod_{k=1}^l (p-\alpha_k)^{r_k} \cdot, \quad f_2(p) \cdot \equiv \prod_{m=1}^n (p-\beta_m)^{s_m} \cdot, \\ \left( N = \sum_{m=1}^n s_m \leq \sum_{k=1}^l r_k = L \right),$$

及び

$$A_{kr} \equiv \frac{1}{(r_k-r)!} \left[ \frac{d^{r_k-r}}{dx^{r_k-r}} \left\{ (x-\alpha_k)^{r_k} \varphi(x) \right\} \right]_{x=\alpha_k} \\ \delta_{N,L} \equiv \begin{cases} 1, & N=L \\ 0, & N \neq L \end{cases}$$

である。

例 1). Heaviside の展開定理：(IV. 21) 式に於て、 $a=0$  とし、これを  $\varepsilon^{at}$  に作用させれば、直ちに所謂一般化せる Heaviside の展開定理<sup>(13)</sup> が得られる。即ち、

$$\varphi(p) \varepsilon^{at} \equiv \delta_{N,L} \varepsilon^{at} + \sum_{k=1}^l \sum_{r=1}^{r_k} A_{kr} \varepsilon^{a_k t} \int_0^t \dots \int_0^t \varepsilon^{(a-a_k)t} (dt)^r \\ \equiv \delta_{N,L} \varepsilon^{at} + \left( \sum_{k=1}^{l-1} + \delta_{k,l} \right) \sum_{r=1}^{r_k} A_{kr} \varepsilon^{a_k t} \\ \int_0^t \dots \int_0^t \varepsilon^{(a-a_k)t} (dt)^r \\ \equiv \delta_{N,L} \varepsilon^{at} + \sum_{k=1}^{l-1} \sum_{r=1}^{r_k} A_{kr} \frac{1}{(\alpha-\alpha_k)^r} \\ \left( \varepsilon^{at} - \sum_{s=1}^r \frac{[(\alpha-\alpha_k)t]^{s-1}}{(s-1)!} \varepsilon^{a_k t} \right) \\ + \sum_{r=1}^{r_l} A_{lr} \varepsilon^{at} \frac{t^r}{r!}, \quad \dots\dots\dots (IV. 22)$$

$$\text{但し} \quad \alpha_l = \alpha, \quad \delta_{k,l} = \begin{cases} 1, & k=l \\ 0, & k \neq l \end{cases} \quad \text{とする。}$$

特に  $\alpha=0$  ならば、

$$\varphi(p) \cdot 1 \equiv \delta_{N,L} \varepsilon^{at} + \sum_{k=1}^{l-1} \sum_{r=1}^{r_k} A_{kr} \frac{1}{(-\alpha_k)^r} \\ \left( 1 - \sum_{s=1}^r \frac{(-\alpha_k t)^{s-1}}{(s-1)!} \varepsilon^{a_k t} \right) \\ + \sum_{r=1}^{r_l} A_{lr} \frac{t^r}{r!}, \quad \dots\dots\dots (IV. 23)$$

例 2).

$$\frac{1}{p^2 + \alpha^2} \left\{ \cos \omega t \right\} \\ \equiv \frac{1}{2j\alpha} \left( \frac{1}{p-j\alpha} - \frac{1}{p+j\alpha} \right) \left\{ \cos \omega t \right\} \\ \equiv \frac{1}{2j\alpha} \left( \varepsilon^{jat} \int_a^t \varepsilon^{-jat} \left\{ \cos \omega t \right\} dt - (\text{共軛値}) \right) \\ \equiv \frac{1}{\alpha^2 - \omega^2} \left\{ \cos \omega t \right\} \\ - \frac{1}{\alpha - \omega} \left\{ \cos(\alpha(t-a) + \omega a) \right\} \\ - \frac{1}{\alpha + \omega} \left\{ \cos(\alpha(t-a) - \omega a) \right\} \\ (\alpha^2 \neq \omega^2), \quad \dots\dots\dots (IV. 24)$$

§ IV. 10.  $D^n$  と  $p^n$  との関係 ( $n$  は正、負の整数)

§§ IV. 10. 1.

$$D^{-n} \equiv p^{-n} + \sum_{k=0}^{n-1} p^{-k} C\left(\frac{a}{t}\right) D^{-n+k},$$

( $n=1, 2, 3, \dots$ ), .....(IV. 25)

証明:

$$\begin{aligned} D^{-n} &\equiv D^{-1} D^{-n+1} \equiv \left[ p^{-1} + C\left(\frac{a}{t}\right) D^{-1} \right] D^{-n+1} \\ &\equiv p^{-1} D^{-n+1} + C\left(\frac{a}{t}\right) D^{-n} \\ &\equiv p^{-2} D^{-n+2} + p^{-1} C\left(\frac{a}{t}\right) D^{-n+1} \\ &\quad + C\left(\frac{a}{t}\right) D^{-n} \\ &\dots\dots\dots \\ &\equiv p^{-n} + \sum_{k=0}^{n-1} p^{-k} C\left(\frac{a}{t}\right) D^{-n+k}, \quad q. e. d. \end{aligned}$$

§§ IV. 10. 2.

$$D^n \equiv p^n - \sum_{k=0}^{n-1} p^{k+1} C\left(\frac{a}{t}\right) D^{n-k-1},$$

( $n=1, 2, 3, \dots$ ), .....(IV. 26)

証明:

$$\begin{aligned} D^n &\equiv D D^{n-1} \equiv \left[ p - p C\left(\frac{a}{t}\right) \right] D^{n-1} \\ &\equiv p D^{n-1} - p C\left(\frac{a}{t}\right) D^{n-1} \\ &\equiv p^2 D^{n-2} - p^2 C\left(\frac{a}{t}\right) D^{n-2} - p C\left(\frac{a}{t}\right) D^{n-1} \\ &\dots\dots\dots \\ &\equiv p^n - \sum_{k=0}^{n-1} p^{k+1} C\left(\frac{a}{t}\right) D^{n-k-1}, \quad q. e. d. \end{aligned}$$

§§ IV. 10. 3 (IV. 25) 式及び(IV. 26)式を用ひれば、  
一般に、

$$f(D) \equiv \sum_{k=0}^l a_k D^k + \sum_{m=1}^n b_m D^{-m}.$$

とする時、

$$\begin{aligned} f(D) &\equiv f(p) - \sum_{k=1}^l a_k \sum_{r=0}^{k-1} p^{r+1} C\left(\frac{a}{t}\right) D^{k-r-1} \\ &\quad + \sum_{m=1}^n b_m \sum_{s=0}^{m-1} p^{-s} C\left(\frac{a}{t}\right) D^{-m+s}, \dots(IV. 27) \\ &\equiv f(p) - \sum_{r=0}^{l-1} p^{r+1} \left[ \sum_{k=0}^{l-r-1} a_{k+r+1} C\left(\frac{a}{t}\right) D^k \right] \\ &\quad + \sum_{s=0}^{n-1} p^{-s} \left[ \sum_{m=0}^{n-s-1} b_{m+s+1} C\left(\frac{a}{t}\right) D^{-m} \right] \\ &\dots\dots\dots(IV. 28) \end{aligned}$$

が得られる。この関係式は常係数線型常微分方程式の記號的解法に利用されることは後に説明する所である。

§§ IV. 10. 4.

$$\begin{aligned} f(D) &\equiv \sum_{k=0}^N a_k D^k \equiv a_N \prod_{k=1}^N (D - \alpha_k)^{r_k} \\ &\equiv a_N \prod_{l=1}^N (D - \beta_l), \dots\dots\dots(IV. 29) \end{aligned}$$

但し、 $\sum_{k=1}^N r_k = N$  とし、 $\alpha_k$  と  $\beta_l$  との對應關係は、

$$\underbrace{\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_1}_{r_1 \text{ 個}}, \underbrace{\alpha_2, \alpha_2, \dots, \alpha_2}_{r_2 \text{ 個}}, \underbrace{\alpha_3, \dots}_{r_3 \text{ 個}}, \dots$$

とすれば、

$$\begin{aligned} f(D) &\equiv f(p) - a_N p \sum_{k=1}^N \prod_{m=1}^{k-1} (p - \beta_m) C\left(\frac{a}{t}\right) \\ &\quad \cdot \prod_{l=k+1}^N (D - \beta_l), \dots\dots\dots(IV. 30) \end{aligned}$$

なる關係がある。

$$\text{証明: } f(p)^{-1} \equiv a_N^{-1} \prod_{k=1}^N (p - \beta_k)^{-1}.$$

であるから、

$$\begin{aligned} f(p)^{-1} f(D) &\equiv \prod_{k=1}^N (p - \beta_k)^{-1} \prod_{k=1}^N (D - \beta_k) \\ &\equiv \prod_{k=2}^N (p - \beta_k)^{-1} (p - \beta_1)^{-1} (D - \beta_1) \prod_{k=2}^N (D - \beta_k), \\ \text{然るに、} \\ (p - \beta)^{-1} (D - \beta) &\equiv (p - \beta)^{-1} \left[ p - \beta - p C\left(\frac{a}{t}\right) \right] \\ &\equiv 1 - p (p - \beta)^{-1} C\left(\frac{a}{t}\right), \dots\dots\dots(IV. 31) \end{aligned}$$

なる故、

$$\begin{aligned} f(p)^{-1} f(D) &\equiv \prod_{k=2}^N (p - \beta_k)^{-1} \prod_{k=2}^N (D - \beta_k) \\ &\quad - p \prod_{k=1}^N (p - \beta_k)^{-1} C\left(\frac{a}{t}\right) \prod_{k=2}^N (D - \beta_k), \end{aligned}$$

此の計算を順次繰返せば、

$$\begin{aligned} f(p)^{-1} f(D) &\equiv 1 - p \sum_{k=1}^N \prod_{h=k}^N (p - \beta_h)^{-1} C\left(\frac{a}{t}\right) \prod_{l=k+1}^N (D - \beta_l) \\ &\quad \left( \text{但し、} \prod_{l=N+1}^N (D - \beta_l) \equiv 1 \text{ とする。} \right) \end{aligned}$$

が得られるから、この式の兩邊に左側より夫々、

$$f(p) \equiv a_N \prod_{k=1}^N (p - \beta_k).$$

を作用すれば結局、

$$\begin{aligned} f(D) &\equiv f(p) \\ &\quad - a_N p \sum_{k=1}^{l-1} \prod_{h=1}^N (p - \beta_h) C\left(\frac{a}{t}\right) \prod_{l=k+1}^N (D - \beta_l). \end{aligned}$$

を得るのである。 *q. e. d.*

#### § IV. 11. 変移演算子 $\varepsilon^{aD}$ と $f(p)$ との関係

$f(p)$  を  $p$  の有理関数とすれば、

$$f\left\{p\left(\frac{t}{a-\alpha}\right)\right\} \varepsilon^{aD} \equiv \varepsilon^{aD} f\left\{p\left(\frac{t}{a}\right)\right\},$$

又は

$$f\left\{p\left(\frac{t}{a-\alpha}\right)\right\} \equiv \varepsilon^{aD} f\left\{p\left(\frac{t}{a}\right)\right\} \varepsilon^{-aD}, \quad \dots\dots\dots(\text{IV. 32})$$

$$\text{但し、} \quad p\left(\frac{t}{a}\right)^{-1} \equiv \int_a^t \cdot dt$$

$$p\left(\frac{t}{a-\alpha}\right)^{-1} \equiv \int_{a-\alpha}^t \cdot dt$$

証明： 先づ

$$p\left(\frac{t}{a-\alpha}\right)^{-1} C\left(\frac{t+\alpha}{t}\right) \equiv C\left(\frac{t+\alpha}{t}\right) p\left(\frac{t}{a}\right)^{-1}, \quad \dots\dots\dots(\text{IV. 33})$$

を証明しよう。

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \int_{a-\alpha}^t C\left(\frac{t+\alpha}{t}\right) \cdot dt = \int_a^{t+\alpha} C\left(\frac{u}{t}\right) \cdot du \\ &= C\left(\frac{t+\alpha}{t}\right) \int_a^t \cdot dt \\ &= C\left(\frac{t+\alpha}{t}\right) p\left(\frac{t}{a}\right)^{-1}, \quad q. e. d. \end{aligned}$$

此の関係より一般に、

$$p\left(\frac{t}{a-\alpha}\right)^{-n} C\left(\frac{t+\alpha}{t}\right) \equiv C\left(\frac{t+\alpha}{t}\right) p\left(\frac{t}{a}\right)^{-n}, \quad \dots\dots\dots(\text{IV. 34})$$

又は

$$p\left(\frac{t}{a-\alpha}\right)^{-n} \varepsilon^{aD} \equiv \varepsilon^{aD} p\left(\frac{t}{a}\right)^{-n}, \quad \dots\dots\dots(\text{IV. 35})$$

$$(n=0, 1, 2, \dots)$$

なる関係が導かれる。更に (IV. 34) 式の逆関係を作れば、

$$p\left(\frac{t}{a-\alpha}\right)^n \varepsilon^{aD} \equiv \varepsilon^{aD} p\left(\frac{t}{a}\right)^n, \quad \dots\dots\dots(\text{IV. 36})$$

$$(n=0, 1, 2, \dots)$$

従つて、 $f(p)$  が  $p$  又は  $p^{-1}$  の有理整関数ならば、

$$f\left\{p\left(\frac{t}{a-\alpha}\right)\right\} \varepsilon^{aD} \equiv \varepsilon^{aD} f\left\{p\left(\frac{t}{a}\right)\right\}, \quad \dots\dots\dots(\text{IV. 37})$$

なる関係が得られる。

次に、 $\beta$  を常数とする時、

$$\begin{aligned} \left\{p\left(\frac{t}{a-\alpha}\right)-\beta\right\}^{-1} C\left(\frac{t+\alpha}{t}\right) &\equiv C\left(\frac{t+\alpha}{t}\right) \\ \left\{p\left(\frac{t}{a}\right)-\beta\right\}^{-1} &\dots\dots\dots(\text{IV. 38}) \end{aligned}$$

を証明しよう。変位定理及び (IV. 32) 式を利用すれば、

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \varepsilon^{\beta t} \int_{a-\alpha}^t \varepsilon^{-\beta t} C\left(\frac{t+\alpha}{t}\right) \cdot dt \\ &= \varepsilon^{\beta(t+a)} \int_{a-\alpha}^t C\left(\frac{t+\alpha}{t}\right) \varepsilon^{-\beta t} \cdot dt \end{aligned}$$

$$\equiv C\left(\frac{t+\alpha}{t}\right) \varepsilon^{\beta t} p\left(\frac{t}{a}\right)^{-1} \varepsilon^{-\beta t}.$$

$$\equiv C\left(\frac{t+\alpha}{t}\right) \left\{p\left(\frac{t}{a}\right)-\beta\right\}^{-1}, \quad q. e. d.$$

これより、一般に、

$$\begin{aligned} \left\{p\left(\frac{t}{a-\alpha}\right)-\beta\right\}^{-n} \varepsilon^{aD} &\equiv \varepsilon^{aD} \left\{p\left(\frac{t}{a}\right)-\beta\right\}^{-n}, \\ (n=0, 1, 2, \dots), \quad \dots\dots\dots(\text{IV. 39}) \end{aligned}$$

が得られ、従つて又、 $f(p)$  が  $p$  の有理整関数ならば

$$f\left\{p\left(\frac{t}{a-\alpha}\right)\right\}^{-1} \varepsilon^{aD} \equiv \varepsilon^{aD} f\left\{p\left(\frac{t}{a}\right)\right\}^{-1}, \quad \dots\dots\dots(\text{IV. 40})$$

なる関係が導かれる。この最後の関係を (IV. 37) 式と組合せて考へれば (IV. 32) 式の関係が得られるのである。

例 1).

$$\int_{a-\alpha}^t t \, dt \equiv \frac{1}{2} \left\{ t^2 - (a-\alpha)^2 \right\},$$

$$\text{又 } \int_a^t (t-\alpha) \, dt \equiv \frac{1}{2} \left\{ (t^2 - a^2) - \alpha(t-a) \right\}.$$

故に、

$$\begin{aligned} C\left(\frac{t+\alpha}{t}\right) \int_a^t (t-\alpha) \, dt \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (t+\alpha)^2 - a^2 - 2\alpha[(t+\alpha)-a] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ t^2 - (a-\alpha)^2 \right\}. \end{aligned}$$

よつて

$$\int_{a-\alpha}^t t \, dt \equiv \varepsilon^{aD} \int_a^t \varepsilon^{-aD} t \, dt \quad \text{である.}$$

$$\text{例 2).} \quad p_0^{-1} \equiv \int_0^t \cdot dt,$$

$$p_a^{-1} \equiv \int_a^t \cdot dt \quad \text{とする時、}$$

$$\frac{\omega p_0}{(p_0 + \alpha)^2 + \omega^2} \cdot 1 \equiv \varepsilon^{-at} \sin \omega t$$

を既知とすれば、(IV. 32) 式により、

$$\begin{aligned} \frac{\omega p_a}{(p_a + \alpha)^2 + \omega^2} \cdot 1 &\equiv \varepsilon^{-aD} \frac{\omega p_0}{(p_0 + \alpha)^2 + \omega^2} \cdot 1 \\ &\equiv \varepsilon^{-D(t-a)} \sin \omega(t-a) \end{aligned}$$

が得られる。かくの如く、(IV. 32) 式は、従来、関数の演算子表示として知られてゐる種々の公式<sup>\*</sup>(脚註)

$$f(p_0) \cdot 1 \equiv F(t), \quad (-\infty < t < \infty)$$

を利用して直ちに

$$f(p_a) \cdot 1 \equiv F(t-a), \quad (-\infty < t < \infty)$$

を得るのに役立つのである。

\* 脚註 従来の公式のすべては、被作用関数として単位関数 1 を用ひてゐるが、これ等の諸関係の多くは (たとへば、電気工学ポケットブック 9. 128 頁の公式 (1) より (27)迄の如き。但し (19) を除く被作用関数を  $1 (-\infty < t < \infty)$  とにしても全く同一の形となるのである。勿論その際  $p$  は  $p \equiv D + pC\left(\frac{D}{t}\right)$  である。

## § IV. 12.

第 IV 章に於て説明せる所を要約すれば次の如くなる。

$$(1). \quad f_n(p) \cdot \equiv \sum_{k=0}^n a_k p^k \cdot \quad (a_k: \text{常數}, n: \text{有限})$$

を要素とする集合は、加法及び乗法に關して可換群を作る。(此の群を  $p$ -群と名附ける。)

(2).  $p$ -群の演算子算法の基礎は

$$p^{-1} \cdot \equiv \int_a^t \cdot dt, \quad p \cdot \equiv D \cdot + pC\left(\frac{a}{t}\right) \cdot$$

及び變位定理

$$f_n(p+\alpha) \cdot \equiv \varepsilon^{-at} f_n(p) \varepsilon^{at} \cdot$$

とである。

(3).  $f_n(p)$  の因數分解、二項定理及び  $f_n(p)^{-1}$  の部分分數展開等はすべて  $p$  を代數記號の如く看做して計算した時と全く同一の形となる。

(4).  $p$ -群と  $D$ -群相互の間では、加法に關する交換法則は成立するが、乗法に關する交換法則は一般には成立しない。たとへば

$$(p-\alpha)^{-1} \cdot + (D+\beta) \cdot \equiv (D+\beta) \cdot + (p-\alpha)^{-1} \cdot$$

は常に成立するが、

$$(p-\alpha)^{-1} (D+\beta) \cdot \equiv (D+\beta) (p-\alpha)^{-1} \cdot$$

は一般には成立しない。何となれば、

$$\text{左邊} \equiv (p-\alpha)^{-1} \left[ p-\alpha + \alpha + \beta - pC\left(\frac{a}{t}\right) \right] \cdot$$

$$\equiv 1 \cdot + (\alpha + \beta) (p-\alpha)^{-1} \cdot - \varepsilon^{at} C\left(\frac{a}{t}\right) \varepsilon^{-at} \cdot$$

であるが、

$$\text{右邊} \equiv \left[ p-\alpha + \alpha + \beta - pC\left(\frac{a}{t}\right) \right] (p-\alpha)^{-1} \cdot$$

$$\equiv 1 \cdot + (\alpha + \beta) (p-\alpha)^{-1} \cdot - pC\left(\frac{a}{t}\right) (p-\alpha)^{-1} \cdot$$

であるからである。(續く)

## 文 献

(12) 竹内端三：函數論，上巻 243~255 頁 (昭 2)

(13) 後藤以紀：電學誌 47, 956 (昭 2)

## 周波数変調送信機

研究部 豊田 準三

## 1 緒 論

無線通信に於ける信号対雑音比は非常に重要な問題である。此の問題に關し周波数変調通信方式が盛んに論ぜられるに到り或る条件下では其の優秀性が認められる様になつた。今回周波数変調無線機を試作する機会を得たので茲に其の概要を報告する。

周波数変調送信法は定数変化法と側帯波移相法とに大別される。前者に屬するもので實用に供されてゐるものは専らリアクタンス管法であり、後者の代表的なるものは側帯波移相法である。前者は三極管の各電極に交番電圧を適當なる位相差を保たせつつ印加した場合に、その三極管がリアクタンス成分を有する事を利用して自動發振周波数を變化せしめる方法であり、後者は一度振幅變調を行ひ、その側帯波のみを取出し位相を  $90^\circ$  變化せしめて原搬送波に加へて位相變調を生ぜしめる方式である。以下に兩方式に従つて試作せる送信機に關し、理論及び實驗結果の大要を示す事にする。

## 2 リアクタンス管周波数變調

三極真空管の各電極に交番電圧を適當なる位相差を以て印加する場合に、真空管はリアクタンス成分を有する。例へば第1圖 A, B, C の如き場合には夫々次の如き型となる。

(A) の場合

$$\dot{Z} = \frac{R_i[r(r+R_i)+p^2(1+SR_i)]}{(r+R_i)^2+p^2(1+SR_i)^2} + j \frac{pR_i^2(1-Sr)}{(r+R_i)^2+p^2(1+SR_i)^2}$$

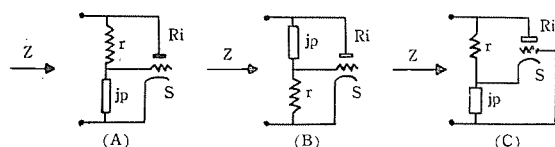
(B) の場合

$$\dot{Z} = R_i \frac{r[R_i+(1+SR_i)]+p^2}{[R_i+r(1+SR_i)]^2+p^2} + j \frac{pR_i^2(1+Sr)}{[R_i+r(1+SR_i)]^2+p^2}$$

(C) の場合

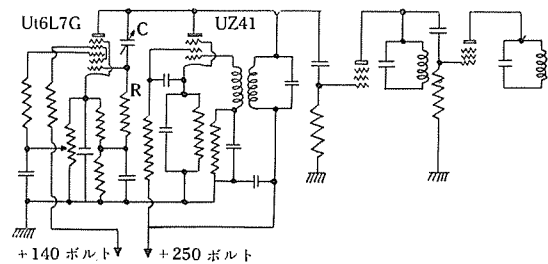
$$\dot{Z} = \frac{rR_i}{r+R_i} + jp \left[ 1 + S \frac{rR_i}{r+R_i} \right]$$

此の事を利用して自己發振器の同調回路に該リアクタンス管を接続し、其の相互コンダクタンス  $S$  を變調電圧により變

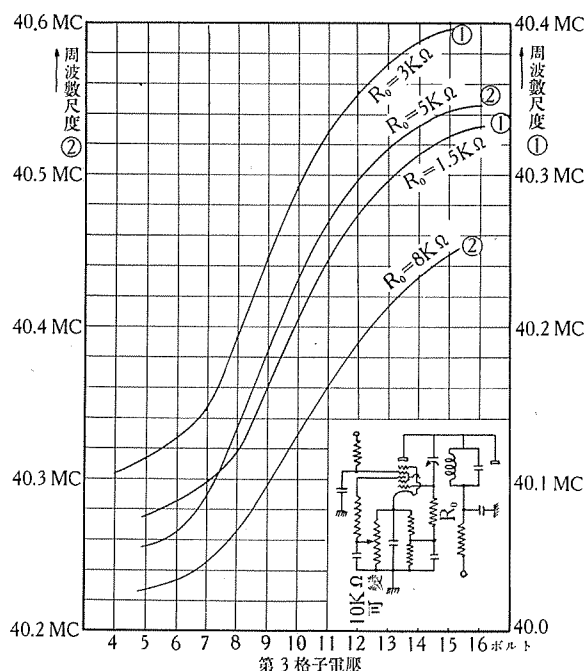


第 1 圖

化せしめる事により、周波数變調を行はしめるのが此の方式の原理である。是等に關する詳論は参考文献に譲るとして、試作せるものに付實驗的結果を示すと、第2圖の如き結線にて行つた場合の周波数變化の靜的特性は第3圖の如くなる。第2圖の結線は第1圖Bに相當せるもので、實施する場合を考慮して、 $p$ として微調用豆バリコンを使用し、真空管を容量的に動作せしめたものである。第4圖にはUt6L7Gを第2圖の如くリアクタンス管として動作せしめたる場合の第三グリッド電壓の變化に對應するインピーダンス軌跡を示した。リアクタンス管と稱しても、決して純リアクタンスではなく、多大の抵抗分の變化をも伴ふものであり共に相加つて周波数偏位を生ずるものである。尙ほ此の方法に於ては主發振器としては、本質的に水晶發振が使用出来ない。従つて主發振の平均中心周波数を安定させる爲に特別の方法を取る必要があるが之に關する報告は次の機会に譲る。

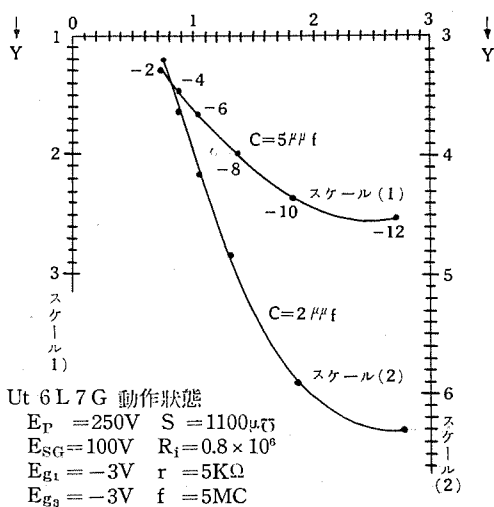


第 2 圖



第 3 圖 周波数偏位特性





第 4 図

### 3 側帯波位相變化法

此の方法は前述せる如く振幅變調を行つた後、之を周波數變調に變換させる方法で、主發振器として水晶發振を用ひ、安定なる搬送波が得られる點が有利である。第 5 圖は此の方法の原理圖で、水晶發振にて得られたる電氣振動を二部に分け、一部は平衡變調して其の出力は側帯波のみとし、他の一部は移相器を通じて位相を  $90^\circ$  變化せしめて、是を平衡變調器出力と合し、茲に振幅變調を伴つた位相變調波が得られる。之内、振幅變化部分は次段以下の振幅制限器により除去され、茲に純位相變調波が得られる。位相變調波と周波數變調波とは互に微積分的なる關係にあり、本質的に何等差異のないもので、位相變調送信機入力音聲部に、周波數に逆比例せる如き濾波器を挿入すれば、周波數變調波の得られる事は後述の如くである。斯くして得られたる周波數變調波は極めて小なる値で、目的とする程度の周波數偏位にする爲には、周波數濾倍器を數段必要とする。試作せるものに於ては振幅制限器と周波數濾倍器とを兼用せしめてあり、周波數濾倍度は 96 倍である。以上を數式的に説明すれば

$$\text{水晶發振器出力 } E_o = A \cos \omega_o t \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{變調音聲電壓 } E_m = A' \sin pt \quad \dots\dots\dots(2)$$

とすれば平衡變調器出力は振幅係数を適當に用ひて

$$K \sin pt \cos \omega_o t \quad \dots\dots\dots(3)$$

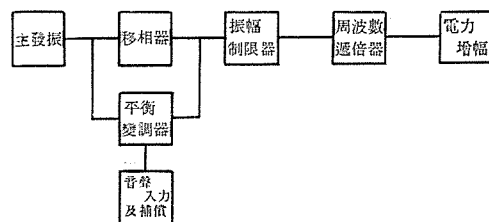
原發振器出力電壓を  $90^\circ$  位相變化せしめたる電壓即ち

$$E_o' = A \sin \omega_o t \quad \dots\dots\dots(1')$$

と (3) との合成値は

$$\begin{aligned} V &= \sin \omega_o t + K_o \sin pt \cos \omega_o t \\ &= \sqrt{1 + K_o^2 \sin^2 pt} \cdot \sin [\omega_o t + \tan^{-1}(K_o \sin pt)] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(4)$$

即ち振幅變調、位相變調の双方を含む電壓波形となる。之内振幅變化の部分は振幅制限器を通ずればなくなり又周波數濾倍は  $m$  倍行つたと考へると終段に得られるものは



第 5 圖

$$\begin{aligned} V &= E_o \sin \{m \omega_o t + m \tan^{-1}(K_o \sin pt)\} \\ &= E_o \sin \{m \omega_o t + m K_o \sin pt - m K_o^3 / 3 \cdot \sin^3 pt \\ &\quad + m K_o^5 / 5 \cdot \sin^5 pt - \frac{m K_o^7}{7} \sin^7 pt + \dots\dots\dots\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(5)$$

茲に於て  $K_o < 1$  とすれば、{ } 内第三項以下は第二項に比して無視しうべく

$$V = E_o \sin \{m \omega_o t + m K_o \sin pt\} \quad \dots\dots\dots(6)$$

として可であり、是は純正陰的位相變調波を示す式である。扱て瞬時周波數とは、位相角の時間に關する微係數であるからして

$$\begin{aligned} \text{瞬時周波數} &= \frac{d}{dt} \phi(t) = m \omega_o + m K_o p \cos pt \\ &= \omega + \Delta \omega \cos pt \quad \dots\dots\dots(7) \end{aligned}$$

$$\text{茲に } \omega = m \omega_o, \quad \Delta \omega = m K_o p$$

即ち搬送周波數  $\omega$  を中心として  $\pm \Delta \omega$  の幅で正弦的に周波數變化を生じてゐるものである。尙ほ (5) 式の第 3 項以下の無視出来ない場合は、歪として現はれるのであるが、歪については後に論ずる。以上 アームストロング氏の創案による周波數變調法の原理を示したのであるが、第五圖の原理圖を其の儘踏襲したる結線では、調整が著しく困難となる。依つて試作したる送信機では第 6 圖(A)の如き結線を用ひた。同圖 (B) は其の説明で分割移相變調法とも稱すべきものである。主發振 (水晶發振) の出力を A 端及び B 端の 2 個所に取り出し、その位相差を第 6 圖 (C) に於ける如く  $2\Psi$  に保ち、且つ振幅を同一にして置く。之の各々をベクトル OA 及 OB を以て示す。今各成分を逆相に振幅變調を行へば、各瞬時には OA', OB' なる値を採り、合成ベクトルは OC' となつて、無變調時の OC に對して  $\theta$  なる位相推移を生ずる譯である。此の場合 CC' は (3) 式に相當し OC' は (4) に相當する。數式的に示せば

A 點に於ける成分を振幅變調すれば

$$(1 + K' \sin pt) \sin (\omega_o t + \Psi)$$

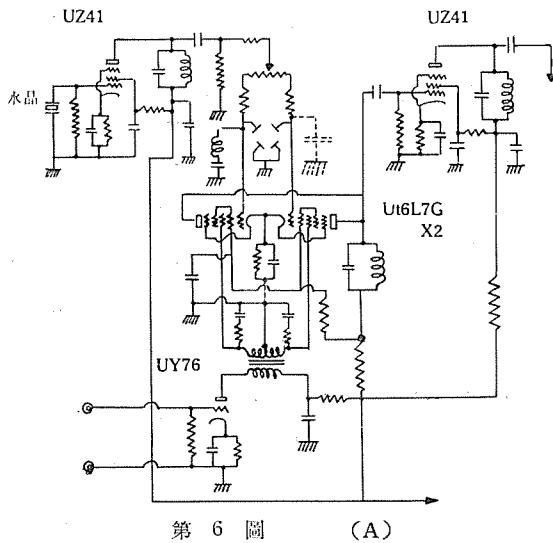
B 點に於ける成分を振幅變調すれば

$$(1 - K' \sin pt) \sin (\omega_o t - \Psi)$$

$$\text{合成波} = (1 + K' \sin pt) \sin (\omega_o t + \Psi)$$

$$+ (1 - K' \sin pt) \sin (\omega_o t - \Psi)$$

$$= 2 \sin \omega_o t \cdot \cos \Psi + 2 K' \sin pt \cdot \cos \omega_o t \cdot \sin \Psi$$



第 6 圖 (A)

$$= 2 \cos \Psi \cdot (\sin \omega_0 t + K' \tan \Psi \cdot \sin pt \cdot \cos \omega_0 t) \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$= 2 \cos \Psi \cdot \sqrt{1 + K'^2 \cdot \tan^2 \Psi \cdot \sin^2 pt} \cdot \sin \left\{ \omega_0 t + \tan^{-1}(K' \tan \Psi \cdot \sin pt) \right\}$$

振幅制限を考慮に入れて且つ  $K = K' \tan \Psi$  とすれば

$$V = E \sin \left\{ \omega_0 t + \tan^{-1}(K \sin pt) \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

となり(5)式と同型であり  $\Psi = 45^\circ$  の時(5)式と完全に一致する。

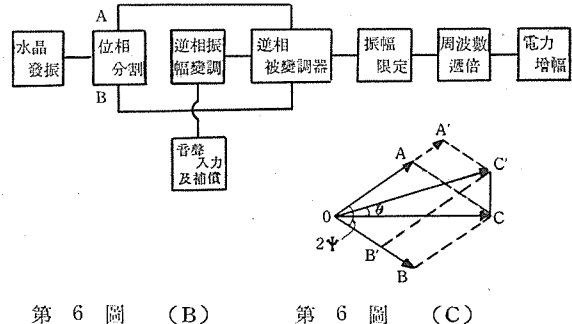
#### 4 側帯波移相波と歪の問題

(6)式に於ける如き位相変調波は、最大変位度  $mK_0$  を一定としても、変調周波数  $p$  が異ると瞬時周波数変位  $\Delta\omega$  が異なる事は、(7)式により明らかであり、変調周波数  $p$  に正比例する。従つて、瞬時周波数に對して直線的なる特性を有する周波数差別回路により、復調して歪を無くする爲には、 $p$  に逆比例したる如き濾波器を通して、變調入力を印加すべきである。斯くした場合は、送信—受信の総合低周波特性は平滑なる特性となる譯であるが、之の際には傳送すべき最低周波数の選擇が問題になる。音楽を放送する場合は別として、人の音聲のみを傳へる場合には、大体に於て  $200\sim$  以下は略しても充分であるとされてゐるから、 $200\sim$  を傳送すべき最低周波数とし、夫れ以下は一定入力とし、其れ以上は  $p$  に逆比例するが如き特性を保たしめたる場合には、(7)式を考慮すれば傳送特性は第7圖の如くなる譯である。次に(5)式に於て  $K_0$  を上記の如く  $200\sim$  以下一定、 $200\sim$  以上  $p^{-1}$  に比例するが如く改めたとすれば、

$$V = E_0 \sin \left\{ m \omega_0 t + m \tan^{-1}(K_0 \sin pt) \right\}$$

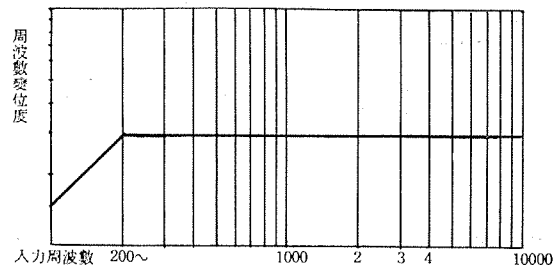
$$K_0 \begin{cases} \dots\dots\dots 200\sim \text{以下恒数} \\ \dots\dots\dots 200\sim \text{以上 } K_0 \propto \frac{200}{f} \end{cases}$$

今  $200\sim$  以上につき考へるとして上式を書きかへれば



第 6 圖 (B)

第 6 圖 (C)



第 7 圖

$$V = E_0 \sin \left\{ m \omega_0 t + m K_0 \sin pt - m \cdot \frac{1}{3} \cdot K_0^3 \sin^3 pt + m \cdot \frac{1}{5} \cdot K_0^5 \sin^5 pt - m \cdot \frac{1}{7} \cdot K_0^7 \sin^7 pt + \dots \right\}$$

瞬時周波数を考へると

$$\frac{d}{dt} \Psi = m \omega_0 + m K_0 p \cos pt \quad (1 - K_0^2 \sin^2 pt + K_0^4 \sin^4 pt) \quad \dots\dots\dots (10)$$

受信して復調したものを展開して見れば

$$= \left\{ mp \left( K_0 - \frac{K_0^3}{4} + \frac{K_0^5}{8} - \frac{5}{64} K_0^7 \dots \right) \right\} \cos pt$$

$$+ \left\{ mp \left( \frac{K_0^3}{4} - \frac{3}{16} K_0^5 + \frac{9}{64} K_0^7 \dots \right) \right\} \cos 3pt$$

$$+ \left\{ mp \left( \dots \right) \right\} \cos 5pt + \dots\dots\dots$$

$$= A_1 \cos pt + A_3 \cos 3pt + A_5 \cos 5pt + \dots\dots\dots (11)$$

即ち上記の如き  $K_0$  の補正を行つても尚ほ(11)式に見る如く  $3p, 5p$  の等奇數次の高調波歪が現はれるのである。之の歪は  $K_0$  の小なる値の時は餘り問題にならないが、 $K_0$  が大になると可成り大きく現はれて来る。例として今  $f = 200\sim$  の音で  $K_0 = \frac{\pi}{6} = 0.577$  の變調を行つたとすれば

$$A_1 = 1.08 \times 10^4$$

$$A_3 = 0.077 \times 10^4$$

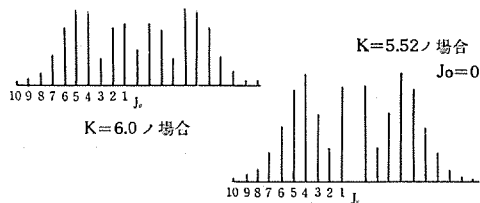
$$A_3/A_1 = 7.15\%$$

即ち、之の程度の周波数變調ではたとへて送信—受信系に於ける低周波増幅部の歪が全然ないとしても、最低7%程度の第三高調波歪が必然的に伴ふのである。次に變調音を  $f = 400\sim$  にしたとすると、 $K_0 = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{200}{400} = \frac{\pi}{12}$  だから

$$A_1 = 0.568 \times 10^4$$

$$A_3 = 0.0104 \times 10^4$$

$$A_3/A_1 = 2\%$$



第 8 圖 周波数変調側帯波 スペクトル

即ち変調音が高くなればなる程第3高調波歪は著しく小となる譯であり数千 $\sim$ になれば 0.1%以下の小なる値である。

### 5 周波数変調波と側帯波

周波数変調方式に於ては振幅変調の場合に比し、搬送波及び側帯波の關係が可成り様子が異なる。

(6) 式を變形すれば

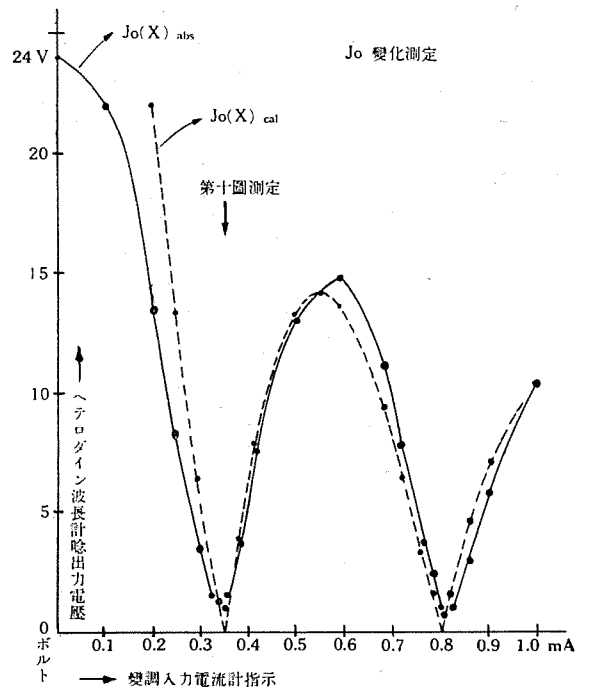
$$\begin{aligned}
 V = & \sin(\omega t + K \sin pt) = J_0(k) \sin \omega t \\
 & + J_1(k) \{ \sin(\omega + p)t - \sin(\omega - p)t \} \\
 & + J_2(k) \{ \sin(\omega + 2p)t + \sin(\omega - 2p)t \} \\
 & + J_3(k) \{ \sin(\omega + 3p)t - \sin(\omega - 3p)t \} \\
 & + J_4(k) \{ \dots \dots \dots \} \dots \dots \dots (12)
 \end{aligned}$$

但し  $k = mK_0$ 。

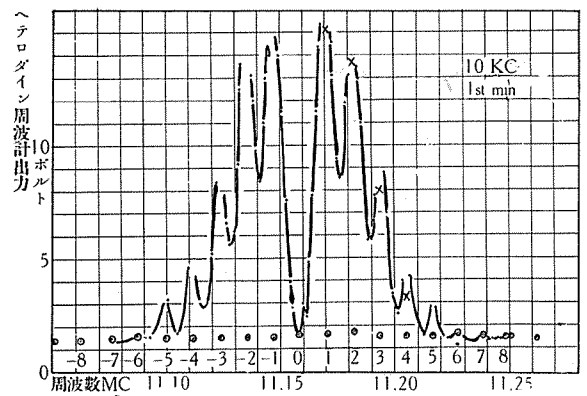
上式を見れば側帯波は無数に出現する如く思はれるが、 $J_s$  の  $s$  の番数の大なるものは非常に小なる値となり、實際問題として、側帯波の出現は搬送波の両側のある範囲に限られてゐると見て差支へない。例へば  $K_0 = 0.25$   $m = 24$  即ち  $K = 6^*$  の場合は  $J_{10}(6) = 0.00696$  であり第8圖側帯波 スペクトル に見る如く  $J_{10}$  以下のものは無視して差支へない。

※此の事は原搬送波 1 の大きさに對し 0.25 の大きさの側帯波を 90° 位相差を保たしめて合成したものを更に 24 倍の周波数過倍を行つた事を意味する。

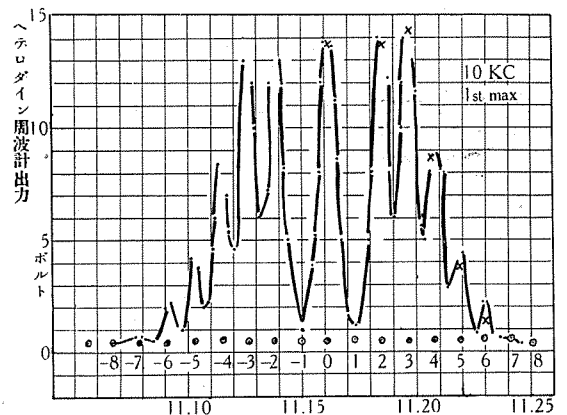
次に(12)式の搬送波の項を見ると振幅変調に比し可成り様子が異なる。振幅変調の場合には変調度を變化せしめても、搬送波の値自身は變化しない。然るに周波数変調の場合には  $J_0(k)$  の大きさに、從つて搬送波自身の振幅も變化し、或る特定の變調指數では搬送波が零となる場合もある。リアクタンス管法の如くに靜的特性測定の許されない側帯波移相法では、之の事實を利用して周波数變位度を知るのである。第9圖曲線は之の測定結果を示したもので、其の横軸は第6圖結線圖中、入力變調變壓器の一次側回路に挿入したる電流計の指示であり、縦軸は24倍の周波数過倍を行つた後の出力の搬送波のみに、ビート(約 1000 $\sim$ )を取つた ヘテロダイン 周波計の唸出力電壓である。圖中點線を以て示したものは  $J_0(k)$  の理論値



第 9 圖



第 10 圖



第 11 圖

であり、實線の示す實測値と可成り精確なる一致を示してゐる。即ち變調周波数 10 KC にて入力約 0.35 mA にて  $J_0(k) = 0$  なる如き値を指示して居り、理論的には  $J_0(k) = 0$  なる  $K$  の値は 2,405 であるから、之の場合

24.05 KC の周波数變位を生じてゐる事を示すのである。第10圖及び第11圖は上記實驗に於て、入力 0.35 mA 及 0.58 mA に於ける、 $J_0(k)=1\text{st min}$ 、及び  $J_0(k)=1\text{st max}$  に相當した變調度に於ける、側帶波分布の實測値であり、同じく ヘテロダイン 周波計の唸出力により測定した結果である。圖中×印は各測帶波の振幅指數  $J_s(k)$  の理論値で、圖に見る如く實測値と満足すべき一致を示し

てゐる。

## 6 周波数變調に於ける二信號同時變調

振幅變調の場合には二つ以上の周波数にて變調した場合の側帶波分布は、各々單獨變調した場合の組合せであるが、周波数變調の場合は複雑である。二周波同時變調に對する式は

$$\begin{aligned}
 S &= \sin\{\omega t + m_1 \sin \mu_1 t + m_2 \sin (\mu_2 t + \alpha)\} = \sin \omega t \cos (m_1 \sin \mu_1 t) \cdot \cos \{m_2 \sin (\mu_2 t + \alpha)\} \\
 &+ \cos \omega t \cdot \sin (m_1 \sin \mu_1 t) \cdot \cos \{m_2 \sin (\mu_2 t + \alpha)\} + \cos \omega t \cdot \cos (m_1 \sin \mu_1 t) \cdot \sin \{m_2 \sin (\mu_2 t + \alpha)\} \\
 &- \sin \omega t \cdot \sin (m_1 \sin \mu_1 t) \cdot \sin \{m_2 \sin (\mu_2 t + \alpha)\} \\
 &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=0}^s \epsilon_{2p} \cdot \epsilon_{2s-2p} \cdot J_{2p}(m_1) \cdot J_{2s-2p}(m_2) \cdot \cos 2p\mu_1 t \cos \{(2s-2p)(\mu_2 t + \alpha)\} \sin \omega t \\
 &+ 2 \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=0}^s \epsilon_{2s-2p} \cdot J_{2p+1}(m_1) \cdot J_{2s-2p}(m_2) \cdot \sin (2p+1)\mu_1 t \cdot \sin \{(2s-2p)(\mu_2 t + \alpha)\} \cos \omega t \\
 &+ 2 \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=0}^s J_{2p+1}(m_1) \cdot J_{2s-2p+1}(m_2) \cdot \sin (2p+1)\mu_1 t \cdot \sin \{(2s-2p+1)(\mu_2 t + \alpha)\} \cos \omega t \\
 &- 4 \sum_{s=s}^{\infty} \sum_{p=0}^s J_{2p+1}(m_1) \cdot J_{2s-2p+1}(m_2) \cdot \sin (2p+1)\mu_1 t \cdot \sin \{(2s-2p+1)(\mu_2 t + \alpha)\} \sin \omega t \\
 &\dots\dots\dots(13)
 \end{aligned}$$

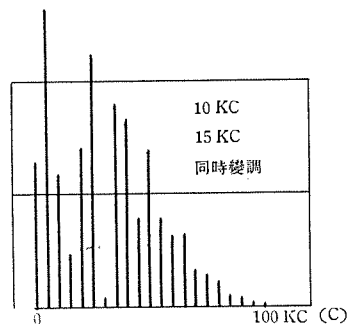
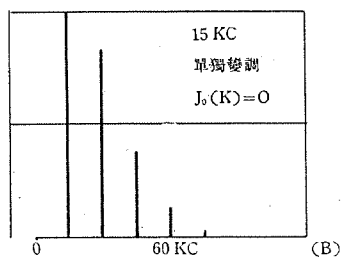
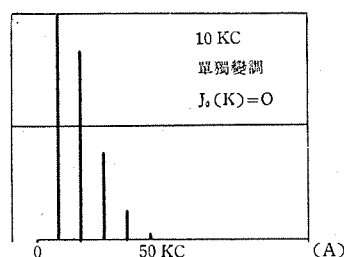
$$\text{但し } \epsilon_0 = 1 \quad \epsilon_n = 2 \quad (n \neq 0)$$

此の式を更に展開を行つて側帶波の分布を知る譯であるが、著しく面倒なる計算となるので結果のみを示す事とする。

- (1) 搬送波を基準とし、その上下に  $(2p\mu_1 \pm 2q\mu_2)$  なる周波数偏差を有し、振幅が  $J_{2p}(m_1) \cdot J_{2q}(m_2)$  なる側帶波
- (2) 周波数偏差が  $(2p+1)\mu_1 \pm 2q\mu_2$  で振幅は  $J_{2p+1}(m_1) \cdot J_{2q}(m_2)$  なる側帶波
- (3) 周波数偏差が  $(2p\mu_1 \pm 2q+1)\mu_2$  で振幅が  $J_{2p}(m_1) \cdot J_{2q+1}(m_2)$  なる側帶波

(4) 周波数偏差が  $(2p+1)\mu_1 \pm 2q+1\mu_2$  で振幅が  $J_{2p+1}(m_1) \cdot J_{2q+1}(m_2)$  なる側帶波

茲に  $\pm$  は 2 つの周波数の和と差を表はし  $p, q$  は夫々 0, 1, 2, 3, ……  $\infty$  等の値を有する。此の様に發生したる側帶波は、振幅變調の場合の様に各々單獨變調の場合の組合せとは成らず、全然新しい構成を示すものである。第12圖は上記の事實をスペクトルに示したもので、各々單獨變調すれば共に  $J_0(k)=0$  なる如き變調度に保つてゐても、之を同時變調すれば、全く異つた構成をなす事は圖に見る如く明らかである。尚ほ圖中  $|An|$  は各側帶波振幅計算値である。



第 12 圖

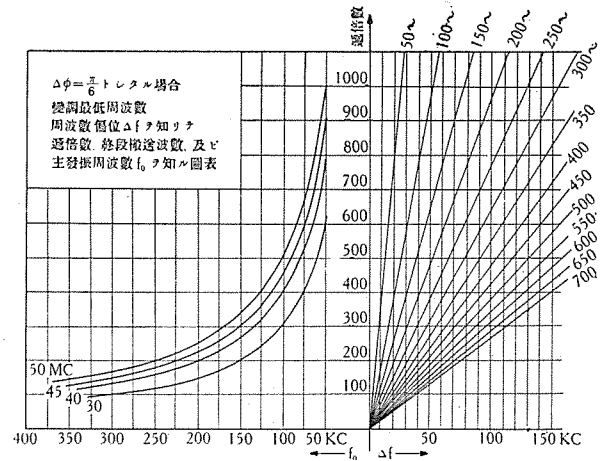
以上周波数変調送信機に關して記述したが、側帯波移相法に依る場合に便なる設計圖表を第13圖に示す。第13圖は變調最低周波数、所要周波数偏位、及び終段搬送波周波数を知り、50 MC, 45 MC, 40 MC, 30 MC に對する主發振周波数及び周波数遞倍度を求める圖表である。尚ほ主發振數に於ける最大位相變化度を  $\pi/6$  と假定した。

#### 文 献

H. F. T. E. A., 55, 5, April 1940

W. E., 18, 208, Jan., 1941, p. 6—17

R. C. A. Review Vol. 5 April, 1941, p. 468



第 13 圖 周波数變調送信機設計圖表

## 絶縁油の劣化度測定方法

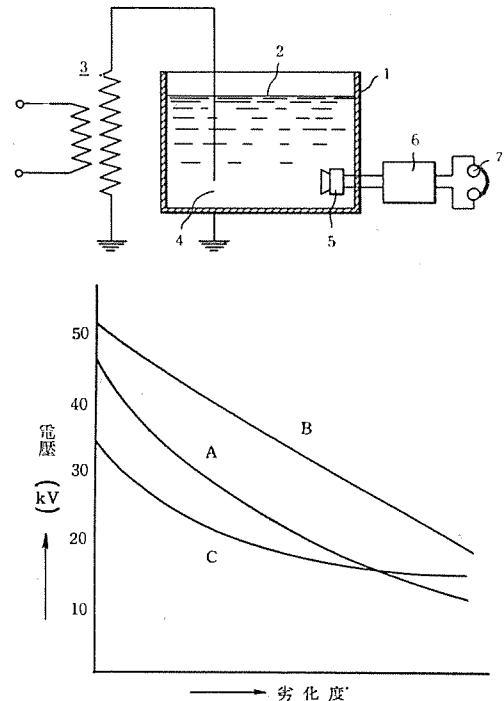
(特許第 148509 號)

絶縁油の特性は、絶縁耐力試験によりてのみ測定されてゐるが、絶縁油中に水分を含んでゐても、絶縁耐力は差程に低下しないから、耐力試験のみによつて油の性質を知悉せんとするは早計である。

絶縁耐力試験と別個に、絶縁油中に含有せらるゝ空気、濕氣或はその他の不純物、例へば スラッジ 等の量に應じ コロナ 音を發生するに要する電位を調べて見ると皆異なる事實が明かにされた。本方法は此の現象を應用して、絶縁油劣化度の測定に成功したものである。

第一圖は測定裝置の略線圖にして、(1) は油槽、(2) は試験油、(3) は コロナ 發生用印加電壓電源、(4) は油中の放電間隙、(5) は油中に浸漬せる マイクロフォン、(6) は増幅器、(7) は受話器である。

實驗によれば、清淨なる油を 50 mm の放電間隙に於いて、直徑 1 mm の電極棒を使用し、之れに電壓を印加せるに 45 kv に於いて コロナ 音を檢出し、更らに試験油を空氣中に曝らし 2 週間後、同一試験を行ひたるに 35 kv にて コロナ 音を發生し、次いで水を略飽和程度に混入した場合は、12 kv にて發音した。従つて第二圖に示せる如き特性曲線 (A) が得られた。又 B 絶縁油及 C 絶縁油等につき夫々行ひ



たる同様の試験結果は (B) (C) 曲線に示す如くである。

即ち コロナ 發生に要する印加電壓と、絶縁油中に含有せらるゝ不純物の量即ち劣化度との關係曲線が求められるから爾後任意の絶縁油の劣化度を知らんが爲には、コロナ發生電壓により該曲線を辿りて求めるのである。  
(中野)



## 周波数変調受信機

研究部 杉多重雄

## 1 緒言

一般に二點間で通信しやうと云ふ時には、其の通信連絡が可能であると共に、傳送される通信の質も良質なものでなければならぬ。此の爲には、例へば無線通信に於ては、受信機の感度の大きい事が望まれる。増幅真空管の發達した現在では、感度を大にする事は比較的容易で例へば百萬倍でも一千萬倍でも、大して困難な事ではない。然しながら感度のみ増加すると、信號も増幅されるが、同時に其に伴ふ妨害雑音も著しく増大されて、通信の明瞭度が低下し、遂には通信不能にもなる。其處で信號電壓は出来るだけ大にして、雑音電壓は出来るだけ小にする、即ち信號對雑音比を大にする必要がある。雑音と云ふものは不規則で正体がつかみ難く、これまで雑音を減少する方法が種々考案されてゐるが、未だ完全なものはない。最近無線界に於て問題になつてゐる周波数変調方式も、從來の振幅變調方式に比して雑音を軽減し得る特長を有する事に着目されて、之が研究を叫ばれてゐる状況である。此度當社に於ても、之が研究の機會を得て、試作を終り室内實驗並びに實地通信試験を行つたので、其の結果について以下受信機に關係ある事項に關して綜合報告を行ふ。

## 2 信號對雑音比

周波数變調方式の雑音に對する特性は、Armstrong, Crosby 等により解析されてゐるが、受信機出力に於て信號對雑音比が改善せられる模様を考へてみる。今受信機入力に

$$E = A \sin \{ \omega t + m \cos pt \}$$

但し  $\omega$  = 搬送波角周波数  $m$  = 變調指數

$p$  = 變調角周波数

なる周波数變調波が存在する時に

$$E' = B \sin (\omega' t + \phi)$$

なる妨害雑音波が加つて、其等の合成されたものが  $e$  なる時には

$$e = E + E'$$

$$= A \sin \{ \omega t + m \cos pt \} + B \sin \{ \omega' t + \phi \}$$

$$= \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \{ (\omega - \omega') t + m \cos pt - \phi \}} \cdot$$

$$\sin \{ \omega t + m \cos pt - \Phi \}$$

$$\text{但し } \Phi = \tan^{-1} \frac{B \sin \{ (\omega - \omega') t + m \cos pt - \phi \}}{A + B \cos \{ (\omega - \omega') t + m \cos pt - \phi \}}$$

合成波の振幅變化は振幅制限器等により出力には影響せず、受信機出力は周波数變化のみに比例すると考へて、上記合成波の瞬時周波数  $F$  を求めると

$$F = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \{ \omega t + m \cos pt - \Phi \}$$

$$= f - \frac{mp}{2\pi} \sin pt - \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} =$$

$$\frac{\left(\frac{B}{A}\right)^2 + \left(\frac{B}{A}\right) \cos \{ (\omega - \omega') t + m \cos pt - \phi \}}{1 + \left(\frac{B}{A}\right)^2 + 2\left(\frac{B}{A}\right) \cos \{ (\omega - \omega') t + m \cos pt - \phi \}} \cdot$$

$$\{ (\omega - \omega') - mp \sin pt - \frac{d}{dt} \phi \}$$

$\frac{B}{A} \ll 1$  にして  $\frac{d\phi}{dt} = 0$  の場合を考へると

$$F = f - \Delta f \sin pt - \frac{B}{A} \{ (f - f') - \Delta f \sin pt \} \cos$$

$$\{ (\omega - \omega') t + m \cos pt - \phi \}$$

$$\text{但し } m = \frac{\Delta \omega}{p} = \frac{2\pi \Delta f}{p}$$

即ち單一妨害雑音による周波数の變位は

$$\frac{B}{A} \{ (f - f') - \Delta f \sin pt \} \cos \{ (\omega - \omega') t + m \cos pt - \phi \}$$

に比例す。 $m=0$  の變調されてゐない時には、妨害電壓

による周波数の最大變位は  $\frac{B}{A} (f - f')$  に比例する。受信機の低周波増幅部の最高遮斷周波数を  $p'$  とすると、

妨害による周波数の最大變位は  $\frac{B}{A} (f - f') = \frac{B}{A} \cdot p'$  に

比例す。變調されてゐる時には之よりやゝ小となる。一方信號出力は周波数辨別器の特性により  $\Delta f$  に比例する

から、信號對雑音比は  $\frac{A}{B} \frac{\Delta f}{p'}$  となり、振幅變調方式

に比して  $\frac{\Delta f}{p'}$  倍改善せられる。

妨害雑音の周波数が  $f$  より  $(f + p')$  まで、一様に分布してゐると考へて、連續性雑音の如き場合で、自乗平均値を取つて計算すると、信號對雑音比は  $\sqrt{3} \frac{A}{B} \cdot$

$\frac{\Delta f}{p'}$  となり、衝撃性雑音の如き場合で尖頭値を取つて

計算すると、 $2 \frac{A}{B} \cdot \frac{\Delta f}{p'}$  となる。

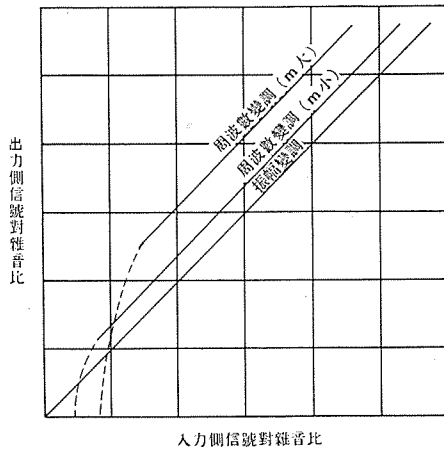
次に  $\frac{A}{B} = 1$  の時には妨害による周波数の最大變位は

著しく増大される爲に、信號對雑音比は改善されない。

此等について計算した結果は第1圖に示す如くにして、

入力の信號對雑音比が大なる場合には、變調指數  $m$  の

大なる程、出力の信號對雑音比は大であり、又振幅變調



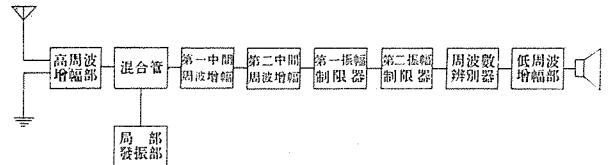
第 1 図 信号対雑音比

よりも大であるが、入力信号対雑音比が小になると、 $m$ の大なる程悪くなり、点線の部分が之を示してゐる。之により本方式に於ては、受信点に於て豫想される信号対雑音比或は通信距離により、 $m$ を適當に設計する必要のある事が認められる。

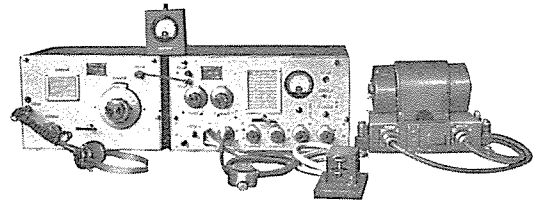
### 3 試作受信機

試作せる受信機の構造は第2圖に示す如くにして、高周波一段、中間周波二段、低周波二段の超短波スーパーヘテロダインである。周波数変調に於ては、通常側波帯が大となるので、搬送波には40 MC 附近の超短波帯が多く用ひられる。従つて本実験に於ても、37~42 MC の範囲で行つた。本機の間中周波数は4 MC にして、通過帯域幅は200 KC である。高周波及び中間周波の増幅には高コンダクタンス管 UZ-6302 を使用し、局部發振及び檢波には夫々 UZ-76 及び Ut-6H6 を用ひ、終段出力は種々の用途に用ひ得る様に UZ-41 を使用してゐる。綜合利得は振幅變調の如く簡単に表現出来ないが、空中線より振幅制限器までの利得は105 db にして、60  $\mu$ V 以上の入力にて振幅制限器は飽和點に達する。従つて本機は此の度以程上の入力を得られる電界強度の個所に使用せられる。試作機の外觀は第3圖の如くにして、電源は24 ボルト直流變壓器により供給せられ、送信機と組合せて移動用の通信にも使用せられる如くなつてゐる。猶本機は試験的に輕合金鑄物を多量に使用し、外形寸法も可成り餘裕を取つてゐるが、試作の結果は、本機の約半分位の大きさで一般に移動用等に用ひられてゐる振幅變調方式のものと、同様の大きさに出来る見込みがついてゐる。

周波数變調受信機が其の構造上振幅變調受信機と異なるのは、廣帯域増幅器、振幅制限器、周波数辨別器等にして、以下此等の點について検討してみる。



第 2 圖 受信機接続略圖



第 3 圖 周波数変調送受信機

### 4 帯域増幅器

周波数變調では信号対雑音比は或る範囲では周波数變位に比例するから、通常 30~100 KC 位の周波数變位を用ひてゐる。従つて通過帯域幅も其れに應じて、振幅變調に比して可成り廣くする必要があり、中間周波等に於て結合同調回路を使用するとしても、並列に抵抗等を入れて回路の  $Q$  を下げねばならぬ。斯くすると利得は勢ひ低下せざるを得ないので、増幅管には高コンダクタンス管 1852 或は 6302 の如きものが必要となる。又増幅段數も場合によつて増加する。斯くの如き増幅回路で、綜合特性に於て通過帯域内に於ける許容利得差が與へられた時に、並列抵抗及び結合度を如何程にすればよいかと云ふ見當をつけねばならぬ。第4圖について検討してみる。

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_2 C_2}}$$

$$Q_1 = R_1 w_0 C_1, \quad Q_2 = R_2 w_0 C_2, \quad n = \frac{Q_2}{Q_1}$$

として一段當りの増幅度  $\mu$  を計算すると

$$\mu = \left| \frac{-j w_0 M R_1 R_2 g_m}{w_0^4 M^2 C_1 C_2 R_1 R_2 + w_0^2 L_1 L_2 \left(1 + j 2 Q_1 \frac{\Delta w}{w_0}\right) \left(1 + j 2 n Q_1 \frac{\Delta w}{w_0}\right)} \right|$$

$$\text{但し } \frac{\Delta w}{w_0} \ll 1, \quad 1 \ll Q_1 \quad \text{と假定す。}$$

$$\mu = \left| \frac{w_0^3 C_1 C_2 M R_1 R_2 g_m}{\left(1 + j 2 Q_1 \frac{\Delta w}{w_0}\right) \left(1 + j 2 n Q_1 \frac{\Delta w}{w_0}\right) + k} \right|$$

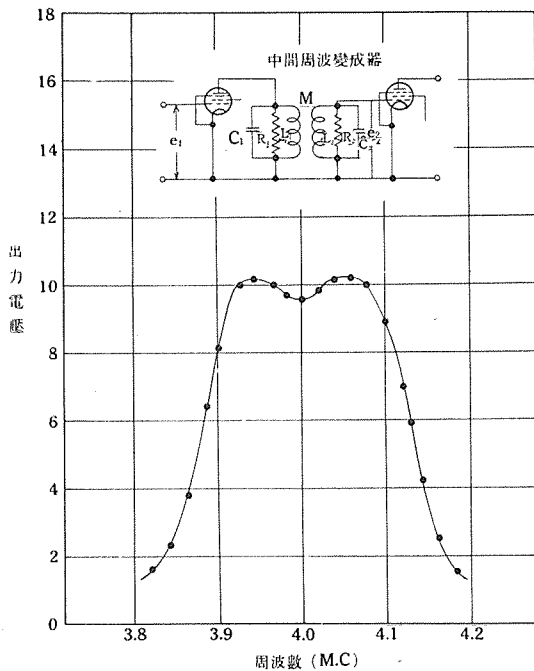
$$\text{但し } k = w_0^6 M^2 C_1^2 C_2 R_1 R_2$$

$$\mu = \frac{w_0^3 C_1 C_2 M R_1 R_2 g_m}{\sqrt{n^2 \left(2 Q_1 \frac{\Delta w}{w_0}\right)^4 - (2 n k - n^2 - 1) \left(2 Q_1 \frac{\Delta w}{w_0}\right)^2 + (1 + k)^2}}$$

通過帯域内に於て特性に凹みを生ぜしめない爲には、 $(\Delta w)^2$  の係数は零であるべきであるから

$$k = \frac{n^2 + 1}{2n}$$

$$\therefore \mu = \frac{1}{\sqrt{n^2 \left(2 Q_1 \frac{\Delta w}{w_0}\right)^4 + \frac{(n+1)^4}{4 n^2}}} \cdot \frac{1}{w_0^3 C_1 C_2 M R_1 R_2 g_m}$$



第4図 中間周波数合特性

通過帯域の端を  $f_0 \pm \Delta f'$  とし、此の点の増幅度を  $\mu'$ 、 $f_0$  に於ける増幅度を  $\mu_0$  とすると

$$\left| \frac{\mu_0}{\mu'} \right|^2 = 1 + \frac{4n^4 Q_1^4}{(n+1)^4} \left( \frac{\Delta f'}{f_0} \right)^4$$

$$\therefore Q_1 = \omega_0 R_1 C_1$$

$$= \frac{(n+1)}{\sqrt{2} \cdot n} \left( \frac{f_0}{\Delta f'} \right) \left[ \left( \frac{\mu_0}{\mu'} \right)^2 - 1 \right]^{\frac{1}{4}}$$

$n=1$  の場合には上式より

$$R_1 = R_2 = \frac{1}{\sqrt{2} \pi C_1 \Delta f'} \left[ \left( \frac{\mu_0}{\mu'} \right)^2 - 1 \right]^{\frac{1}{4}}$$

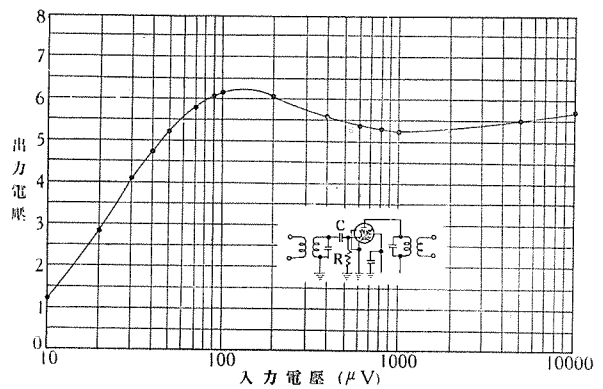
$$L_1 = L_2 = \frac{1}{4 \pi^2 f_0^2 C_1}$$

$$M = \frac{\sqrt{2} \Delta f'}{8 \pi^2 f_0^3 C} \cdot \frac{1}{\left[ \left( \frac{\mu_0}{\mu'} \right)^2 - 1 \right]^{\frac{1}{4}}}$$

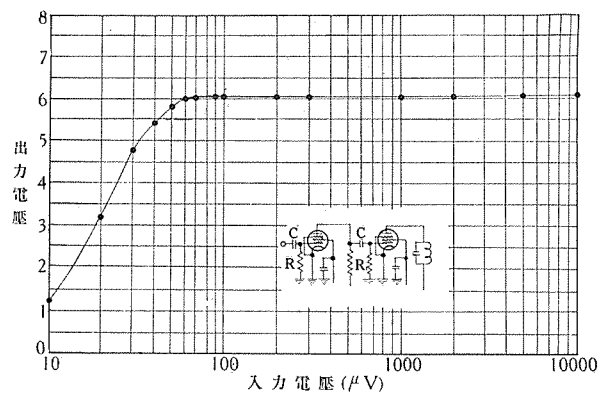
上式より  $f_0$ 、 $\Delta f'$ 、 $C$ 、及び  $\frac{\mu_0}{\mu'}$  が與へられれば、 $R$ 、 $L$ 、 $M$  を決定出来る。然し実際には更に微小な調整を要するは勿論の事である。雑音を極めて少なくする爲には後述の如き理由により、回路の同調は正確で特性は完全な對稱形なる事を要す。然るに高コンダクタンス管の入力容量は、種々の原因で多少變動し離調を生ぜしむる原因となるので、並列容量  $C$  を大きくして變動の割合を小にした方がよい。

## 5 振幅制限器

周波数變調に於ては入力振幅變化を除去する爲に、振幅制限器を用ふ。此には格子蓄電器及び抵抗により自己偏倚電壓を生じて、大なる入力を抑壓するもの、及び陽極、遮蔽格子等の電壓を低くして飽和作用を利用したもの等がある。一般には兩作用を併用し、一段では不足



第5図 振幅制限器特性



第6図 振幅制限器特性

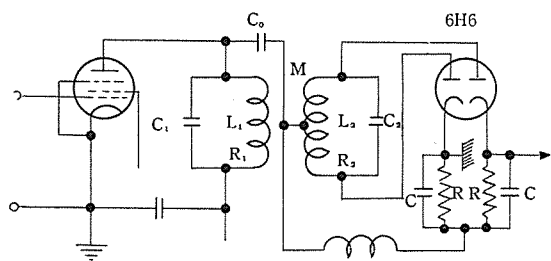
であるから二段以上、或はA、V、C等の如きものを併用して、入力幅の広い範圍の變化に於て、絶えず一定の出力を得るやうにしてゐる。第5圖及び第6圖は夫々振幅制限器一段及び二段の特性を示してゐる。

格子制限に於ては偏倚電壓を生ずる時定數が問題で、衝撃波入力等に対しては小なる時定數を要す。種々な波形の入力に対しては、其に應じた時定數が望ましいので制限器二段以上の場合には長短各種の時定數を使用す。然し此の方法のみによる振幅制限は完全と云ひ難く、妨害入力の存在する時に偏倚電壓を生ぜずして、既に失くなつた後に生じて却つて信號電壓を抑壓する事もある。従つて陽極制限と、併用して効果を擧げ得る。

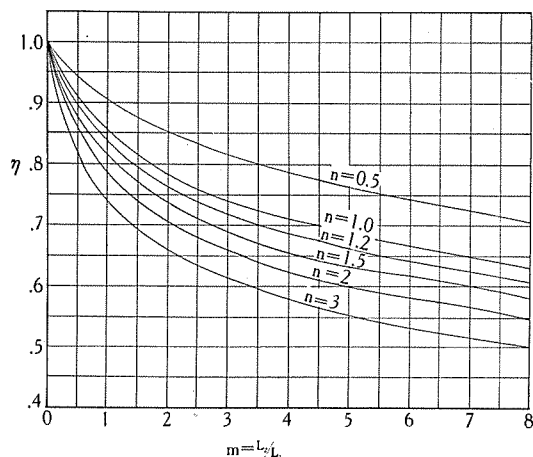
猶ほ振幅制限器は、搬送波が正確に通過帯域の中央にあつて、周波数辨別器特性の中心周波数に一致してゐる時には、雑音の減少と云ふ點からは重要な役割を演じないが、通常の場合の如く微小ながらも離調してゐるときには可成り有効である。

## 6 周波数辨別器

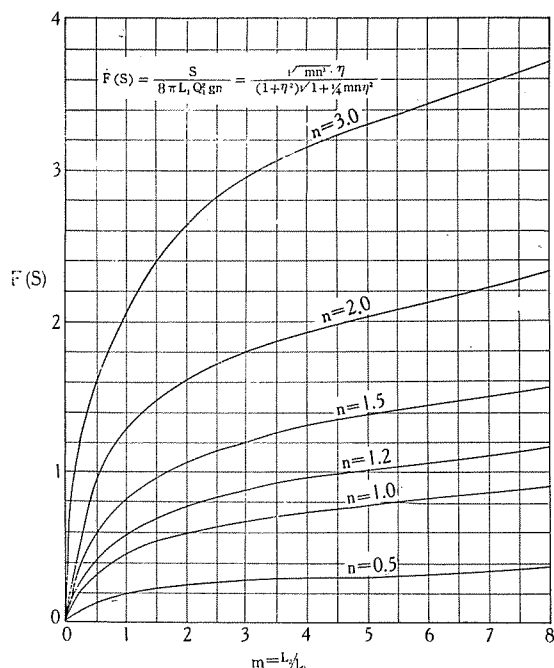
周波数變化を振幅變化に變換する回路は種々あるが、通常は第7圖の如く、一次電壓、及びそれと大略  $\frac{\pi}{2}$  位相の異なる二次電壓との和、並びに差の電壓を別々の整流管により整流し、負荷抵抗中に生ずる電壓の差を取り出してゐる。本回路については、Foster、Seeley 等によ



第 7 圖 周波数辨别器回路

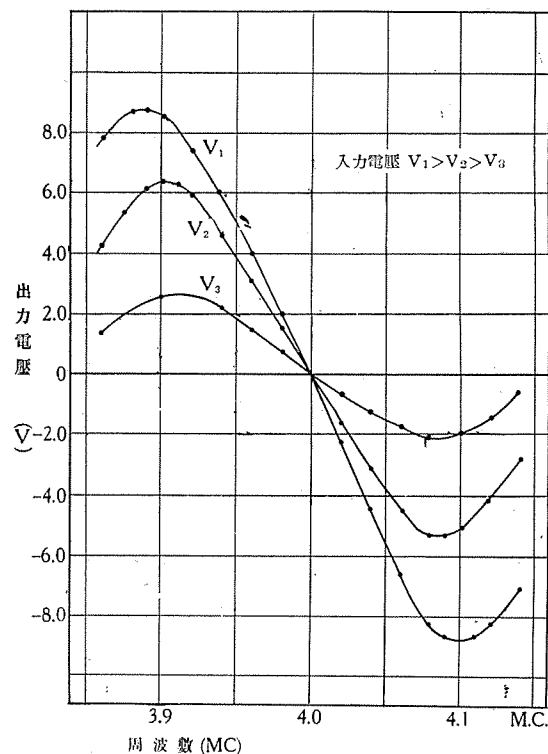


第 8 圖 最適結合度曲線



第 9 圖 傾度曲線

り解析されたものがあるが、一次二次回路の  $Q$  は同一と假定してゐる。然るに實際は一次回路には塞流線輪が並列に入つて居り、二次回路には整流管が存在する爲に、上記假定に一致し難い點もあるので、一次二次の  $Q$  の等しくない一般的な場合について、特性曲線の形を計算してみると、出力電圧  $V$  は



第 10 圖 周波数辨别器特性

$$V = \frac{L_1}{C_1 R_1} g_m e_1$$

$$\left[ \sqrt{\frac{1 + (\frac{1}{2} \sqrt{mn} \eta + nx)^2}{(1 + \eta^2 - n^2 x^2)^2 + 4 n^2 x^2}} - \sqrt{\frac{1 + (\frac{1}{2} \sqrt{mn} \eta - nx)^2}{(1 + \eta^2 - n^2 x^2)^2 + 4 n^2 x^2}} \right]$$

但し  $e'$  = 入力格子電圧

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{2\pi \sqrt{L_2 C_2}}$$

$$Q_1 = \frac{2\pi f_0 L_1}{R_1}, \quad Q_2 = \frac{2\pi f_0 L_2}{R_2}$$

$$m = \frac{L_2}{L_1}, \quad n = \frac{Q_2}{Q_1}$$

$$\eta = \frac{wM}{\sqrt{R_1 R_2}} = \text{實際の結合と臨界結合との比}$$

$$x = 2Q_1 \frac{f_0 - f}{f_0}$$

上式  $f$  をについて微分し、 $f_0$  に於ける傾度  $S$  を求めると

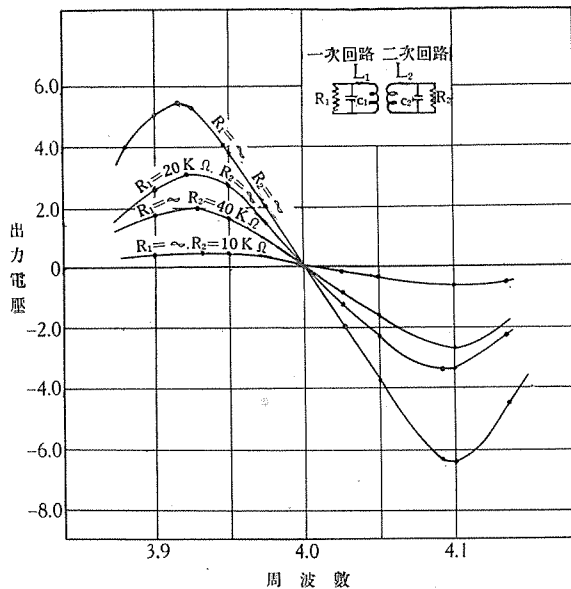
$$S = 8\pi L_1 Q_1^2 g_m \frac{\sqrt{mn} \eta}{(1 + \eta^2) \sqrt{1 + \frac{1}{4} mn \eta^2}} \quad (V/\sim/V)$$

更に  $S$  を最大ならしめる  $\eta$  の値を求めると

$$\eta = \sqrt{\frac{\sqrt{1 + 2mn} - 1}{mn}}$$

即ち上記の関係を満足する時には曲線の傾度は最大となる。而して  $m$ 、 $n$  の値に對しては最大値は無く、夫々  $m$ 、 $n$  の大なる程  $S$  は大となる。此の關係は第 8 圖及び第 9 圖に示す如くである。

試作機の辨别回路について實驗の結果求めた曲線は第 10 圖及び第 11 圖及び第 12 圖に示してゐる。即ち第 10 圖及



第 11 圖 周波数辨别器特性

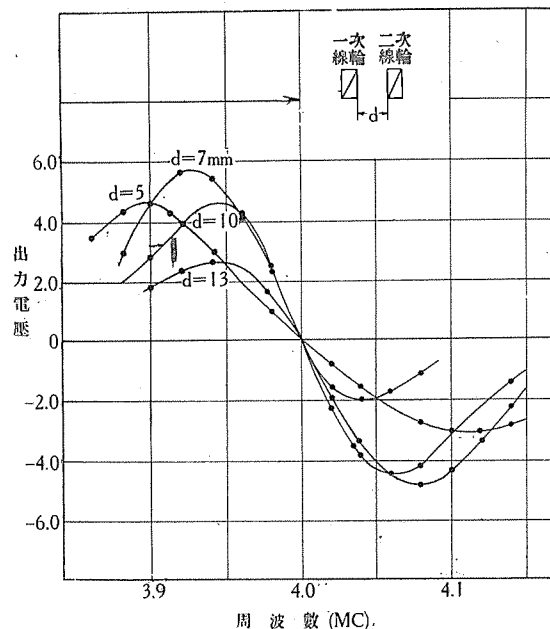
び第 11 圖は夫々入力及び回路の  $Q$  と特性の關係を示す。又第 12 圖によると傾度及び直線動作範圍に最適結合の存在する事が分る。

此の辨别回路で都合の悪い點は、第 10 圖に示す如く入力振幅の變動によつても出力に變動を生ずる事である。従つて振幅制限も理想的に完全ではないから、周波数變調受信機に於ても振幅變調が混入し得る。搬送波が正確に辨别器特性の中心に一致する時は、入力の振幅變動は現はれない。又雑音も最も少くなる。二次側の兩整流回路が總ての點で完全に平衡してをれば問題ないが、通常整流管陰極の一方は接地する爲に、對地静電容量に不平衡を生じ、又整流管内部抵抗其の他の不平衡により、出力の零となる中心周波数が入力の大きさにより多少變化する。即ち周波数を一定にして、入力が例へば  $1000\mu V$  の時に出力零なる如く回路を調整したる後に、入力のみを變化すると、第 13 圖の如く出力は絶えず零とならず、多少出て来る。此の爲に振幅變調信號或は雑音が多少出て来る。従つて完全な振幅制限器が必要缺くべからざるものとなる。

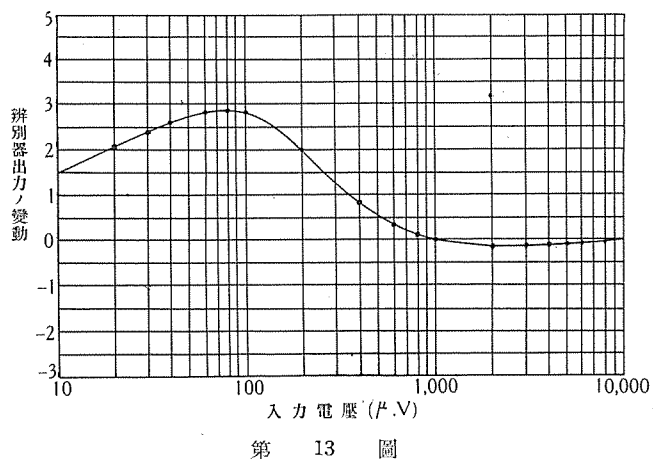
周波数辨别回路としては此の外にも種々ある。少しく同調周波数の異つた二つの回路を使用したもの、或は引込み發振器を利用した Woodyard 等の方法があるが、何れにしても出力が周波数のみに比例して、入力振幅に無關係な回路を作る事は可成り容易ではない。

## 7 雑音

衝撃性雑音が受信機入力に加へられた場合に、同調回路の多段縦續せられてゐる中間周波回路に於て起す現象並びに之に對する振幅制限器、周波数辨别器の動作について考へてみる。今空中線回路に  $t < 0$  にて  $e(t) = 0$  であり、 $t \geq 0$  にて  $e(t) = E$  なる單位衝撃電壓が加つたとする。受信機は球間結合回路として、 $LC$  の同調回路の



第 12 圖 周波数辨别器特性



第 13 圖

みより成るものが、 $n$  段縦續せられてゐるものと考へて  $n$  段目の過渡的出力電壓を、重疊の定理を用ひ  $wt \gg 1$  なる時刻について求めると、

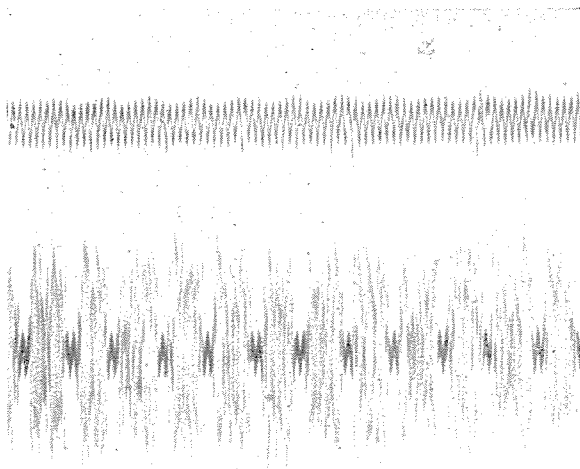
$$E_n(t) = \mu^n E \cdot \frac{(\delta t)^n}{n!} e^{-\delta t} \cdot \cos \omega t$$

$$\omega = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}, \quad \delta = \frac{R}{2L} = \text{減幅定数}$$

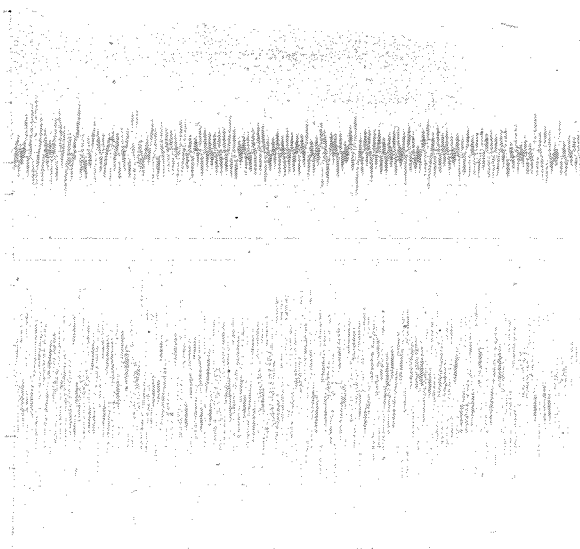
$\mu = \omega$  なる強制振動波に對する一段の利得

即ち上式によると、同調回路の固有振動数の自由振動が起り、其の包絡線は  $\frac{(\delta t)^n}{n!} e^{-\delta t}$  にて示される。減幅率  $\delta$  の大なる程、又増幅段数  $n$  の小なる程、電壓の最大値は大きい。振動時間は短くなる。周波数變調に於ては帯域濾波器の  $\delta$  は比較的大きいから、尖頭値は大になり易いが、一定値以上は振幅制限器により遮斷されるので問題はない。振動時間は制限器ではどうしても出來ないが  $\delta$  が大であるから比較的小に出来る。問題は自由振動周波数  $f$  で、之が辨别器の中心周波数に一致せる時は雑音出力は極めて小になるが、中心より少しでもずれる時は





第 14 圖 周波数変調（上）と振幅変調（下）の雑音の比較



第 15 圖 周波数変調回路の同調せる時（上）と離調せる時（下）の雑音の比較

辨別器特性に應じた出力が出て来る。同調結合回路に於ては、自由振動は  $f/\sqrt{1 \pm k}$  の二つ存在するが、此の時には二つの周波数の中心が辨別器の中心に一致すればよいのである。即ち云ひかへれば、濾波器が辨別器の中心周波数に對して完全な對稱特性を有し、搬送波が之に一致すれば、制限器無くとも雑音は著しく減少出来る。

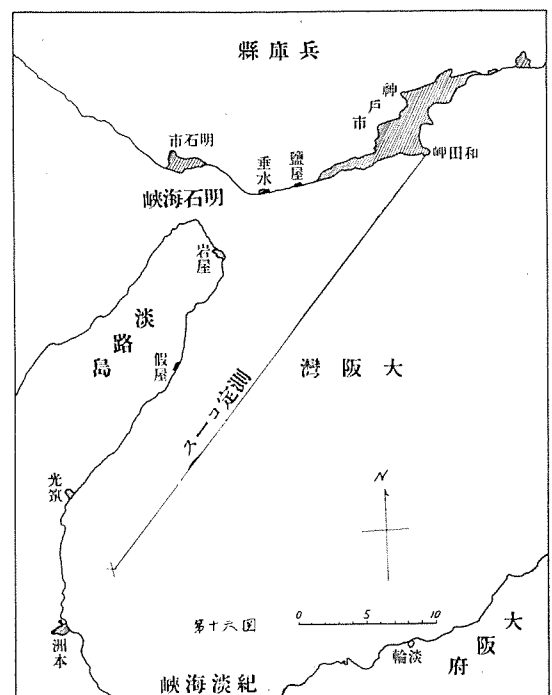
周波数変調と振幅変調との雑音の比較實驗を行つた結果を第 14 圖に示す。此の時の振幅変調受信機の通過帯域幅は  $\pm 10$  KC で、變調度は約 70% である。周波数変調の方は周波数變位  $\pm 100$  KC、變調周波数 800 ㎐ で、同時に兩方の受信機を動作し、誘導線輪の火花による雑音を同時に入れて、受信機出力電壓をオシログラムに撮影せるものである。周波数変調に於ては雑音妨害は皆無なるに反し、振幅變調にては著しい雑音の爲に、信號は聞き取れなかつた。此によつて周波数變調では、航空機自動車の如く、内燃機自發雑音の多くて從來の方式では使

用不能であつた部分、或は電送寫眞又は特殊用途で衝擊性雑音を嫌ふ所に可成りの用途があるものと豫想される

第 15 圖の寫眞は辨別器と搬送波が離調せる影響を示すもので、前述の如く離調した時には雑音は増加する。

## 8 通信實驗

試作せる送受信機を以て、通信距離及び雑音特性の比較を行ひ、其の實用性を確める爲に數回の通信實驗を行つた。第一回は昨年六月大阪灣内に於て第 16 圖の如き經路にて試驗した。送信機は高さ約 25 米の當社神戸製作所屋上より、出力約 15 Watt にて兩變調方式交互に送信した。受信機は船に乗せ、空中線は海面上約 10 米の高さに張つた。船が和田岬を出て須磨沖を通り、送信點より 15 杆位までは、別に受信に空中線を要しない位感度有り雑音も少かつた。淡路島洲本沖 35 杆の地點でも充分感度あり、海上では超短波の傳播も良好で、之の程度の送受信装置で、數十杆の通信可能と思はれた。雑音に對しては、船及び附近よりの擾亂雑音は皆無の爲に、兩方式に前述の如き著しき差は認められなかつたが、周波数變調の方が 4~5 デシベル少かつた。此處で面白い事は、同一の船上に積載してゐた連絡用短波送信機による混信妨害が、兩方式により著しく相違してゐた。振幅變調では受信機の近くで送信が始まると、全く混信して神戸よりの信號は入らない。然るに周波数變調では、送信のモルス符號が微力なクリックとして入るのみで、受信不能になる事は無く、又須磨沖邊の比較的近くで電界の強い所では、殆んど混信しなかつた。此等は本方式の特長となる點の一端であらうと思はれる。



第 16 圖

第二回よりの実験は何れも陸地にて行つた。此の時は超短波傳播の特性がよく現はれて、電波は途中の地況や送受信地附近の状況に左右されて著しい變化を示した。本年2月地上10米餘りの研究部屋上と自動車との間で實驗した所、塚口を経て武庫川附近までは電話連絡可能にして、受信機の直ぐ側で前述の誘導線輪による雑音を發生しても、電話の明瞭度は大して低下せず、又附近工場よりの妨害も受けなかつた。一方自動車上に於ては、阪神國道の如き電車自動車等の多數存在する所でも、通信に困難は感ぜられなかつた。然るに振幅變調では自動車等により著しく妨害され、衝撃性雑音の爲に耳が痛くて受話器を掛けて居られない程度である。道路上の一地點にて自動車雑音を測定せる所、周波數變調は振幅變調に比して14~18デシベル程度少かつた。

## 9 結 言

上記結果を綜合するに、周波數變調は適當な場所に、適當な使ひ方をすれば、優れた特長を示して雑音も少い事が認められた。猶本方式は今後の研究により、更に新しい應用分野も開拓される事と思ふ。

### 参 考 文 献

1. M. G. Crosby; F. M. Noise Characteristics  
I. R. E. April 1937
2. Foster, Seeley; Automatic Tuning Circuits  
I. R. E. Mar. 1937
3. Landon; Impulse Noise in F. M.  
Electronics Feb. 1941

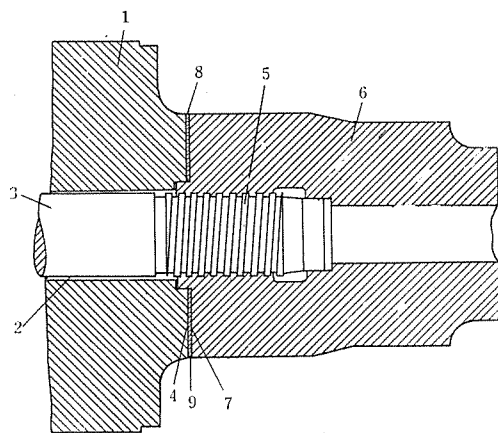
## 組立式回轉子の締結法

(特許第 148512 號)

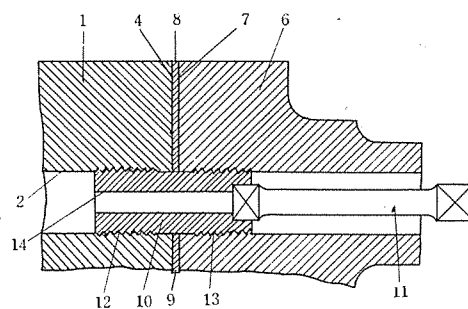
タービン 發電機の如き大型回轉機の回轉子は、全体として均質なものが得難いから、複數區分の要素を、軸方向に連結して、組立式となすを普通としてゐる。而して之等複數區分の連結手段としては、中心ボルトを通して緊締してゐるが、大型になれば、中心ボルトを素材に捻込む事が容易でなく、強固なる緊締は期待出来ない。従つて豫め要素間を、中心ボルトにより締着し、然る後、要素相互間を更に、他の通しボルトにて締むるか或は熔接してゐる。然し之も相當煩雜にして而も素材に機械的及電氣的の悪影響を及ぼす弊害がある。

本發明は、之等の諸缺點に鑑み、先づ第一圖に示す如く、軸主部(1)に中心貫通孔(2)を穿ち、中心ボルト(3)を緩挿し、該ボルトの軸主部端面(4)より延在せる部分に形成せる捻子部(5)に軸端部(6)を捻込み、軸端部の端面(7)と主部(1)の端面(4)とを突合はせ、水壓又は適當の方法により、軸端部(6)を軸主部に對し、軸方向に引張る。然る時は軸端部(6)と捻子部(5)とは緊密に螺合し、且中心ボルトは、強制的に伸張せらるゝ爲、端面(4)(7)間に空間を生ずる。

従つて該空間に半割の金屬環(8)(9)を兩側より叩込み、引張壓を消去せしむれば、中心ボルトの自然收縮により兩部(1)(6)は、其の突合面(4)(7)に向つて相寄り、環を強固に振壓し兩部(1)(6)を緊締せしむる事が出来る。



第 1 圖



第 2 圖

又第二圖に示す如く、兩部(1)(6)に跨る短ボルト(10)を、工具(11)にて捻込み、ボルト(10)の中心孔(14)に、電熱体を挿入し、加熱により引伸し、端面(4)(7)間に空間が生じたる時、環(8)(9)を挿入し、電熱体を去りてボルトの自然收縮により該環を挾壓せしむる如くなすも一法である。

本發明は作業簡便にして、而も間隙子の介在は電氣的に何等悪影響を及ぼさず、組立軸を強固に緊締し得る特徴がある。

(中野)

## 電氣ホイスト用鎖に就て

名古屋製作所 高 桑 常 信

### 1 緒 言

作業の能率化と言ふ事が喧しく叫ばれる昨今、その一翼として荷役機械の重要性が益々切實に感ぜられるようになつて來たが、クレーン等と比べて非常に簡便に設備し得て而も相當の重量物を運搬し得る電氣ホイストが特に要求されるようになって來た。

而して此等荷役機械の生命とするところは、絶対に安全であり、又操作の極めて簡易なものたることでなければならぬ。即ち如何に不馴れの者が使用しても些かの不安もなく、その目的を完全に達し得るものでなければならぬのである。

依つて荷役機械の設計製作に當つては、其の構造及び材料等に徹底的安全を期さねばならぬ。それ等の缺陷は忽ち尊い人命と貴重なる設備とに影響するものであることを思へば決して等閑には出來ない筈である。

### 2 電氣ホイストに使用せる鎖と鋼索との比較

荷役機械の分類法には種々あるが、その一方法として荷物巻上用に鋼索を使用するものと、鎖を使用するものとに分けることが出来る。現今のクレーン、ホイスト類は殆んど大部分鋼索を使用しており、僅かに手働のチェーンブロックがその名の示す如く鎖を使用してゐる状態である。

我社に於ては先づ鎖を使用せる電氣ホイストを製作し、(第1圖參照) 引続き鋼索を使用せるものも製作して居るので、この兩者の特徴を比較検討して見よう。

- (1) 彎曲部に於て鋼索は大きな曲げ作用を受ける、従つて卷胴の直徑を大にする必要が生じ、巻上高さが低くなる缺點があるが、鎖を使用せるものは卷胴に比べて鎖車は非常に小さくなり、巻上高さを高くすることが出来る。
- (2) 揚程が變化したる場合、鋼索を用ふるものは卷胴の大きさを變へる必要があるが、鎖を用ふるものは鎖を必要量だけ延長するのみで充分である。
- (3) 運轉に際して鋼索は騒音が少い。
- (4) 鋼索は熱のため極めて弾性に富み、衝撃作用をよく吸収し得る。
- (5) 鋼索の老衰は表面の損傷程度により推測し得るも、鎖は推測し得ない場合が多い。
- (6) 鎖は均一性に乏しく、脆弱點を包藏する危険性が多い。

大要以上の如くである。故に鎖の製作に就ては充分入

念に行ひ、嚴密周到なる試験を施し絶対安全なるものを使用すべきである。

### 3 鎖の製作について

ホイストに用ふる鎖として具備すべき條件の主なるものを揚げると

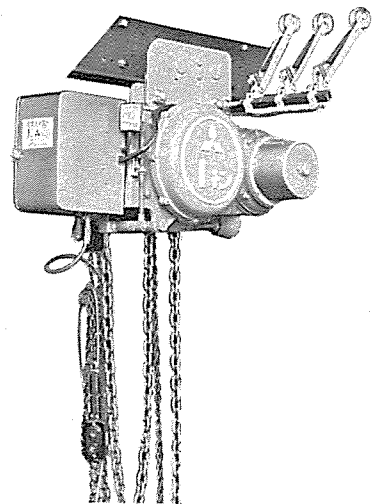
- (1) 熔接の完全なること
- (2) ピッチの均一なること
- (3) 捩れの無いこと

等であるが、この中(1)(2)が特に重要である。鎖の製作法としては、艦船用大型錨鎖中のあるものは、鑄造により製作されるが大部分は鍛接、或は電氣熔接により製作されてゐる。荷役機械に用ふる鎖も鍛接か電氣熔接に依らねばならぬ。

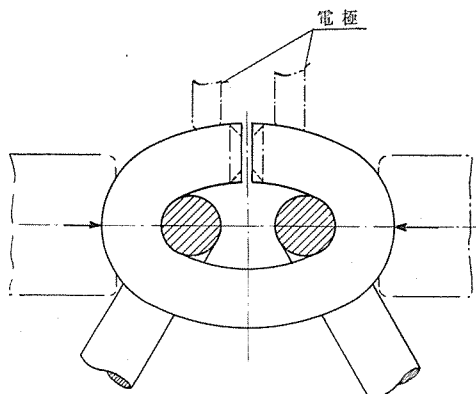
鍛接にて製作する時はピッチを均一なものとするために型を作り、スタンプし整形しなければならぬが一連の鎖では鎖環の数が多數であるから多量生産には適しないのである。

電氣熔接に依れば熟練如何によつては、極めてピッチも正確に然も多量生産することが可能であり、現在荷役機械に用ふる鎖は殆んど總てこの方法に依つてゐる。製鎖用電氣熔接としては、アップセット法が主である。一般に比較的徑の小さいものは熔接し易いのであるが、徑が大きくなるに従つて接觸面が一樣に熔融せず、不完全熔着になり易いのである。

これを防ぐために熔接せんとする部分を第2圖鎖線の如く旋盤加工しておく方法もあるが非常に手数がかかるのであまり歡迎されない。



第1圖 電氣ホイスト



第 2 圖

接觸部分が熔融状態になった時に左右より加圧するため寸法が幾分縮むのであるが、この短くなつた長さを寄りと呼べる、この寄りと素材径との関係は凡そ第3圖の如くである。

鎖の場合は熔接部が未だ冷えない間に型に入れて叩き、寄りによつて生じた膨みをなくしてゐる。この膨みを残しておくと、もつれる原因となるから危険であり、必ず除去しておかねばならない。

電気熔接は強度を得るためには熔融状態による加圧時機の判断及び電流切斷時の適確が極めて大切であるが鎖のピッチの均一性を得るには特に熟練を要する仕事である。

#### 4 引 張 り 試 験

熔接は各鎖環一個々々が完全に行はれておらねばならない、たとへば所でも不完全熔着の鎖環があると不測の災害を發生する原因となる故必要なる長さに製作したる鎖に就て一本々々厳密なる引張り試験を施さねばならない。荷役用鎖の規格は JES に規定されてゐないので、錨鎖に對する規格に準據してゐるがその大要を示すと、

- (1) 素材の抗張力は  $36 \text{ kg/mm}^2$  以上たること。
- (2) 製作せる一連の鎖より任意の 2~3 鎖環を取り出し引張破壊試験を行ひ、この時の抗張力が  $24 \text{ kg/mm}^2$  以上たること。
- (3) (2) 項の試験に合格したるものは一連となしたるまゝ  $12 \text{ kg/mm}^2$  の牽引試験を行ひ、この場合著しき變形裂疵切斷等のないものたること。

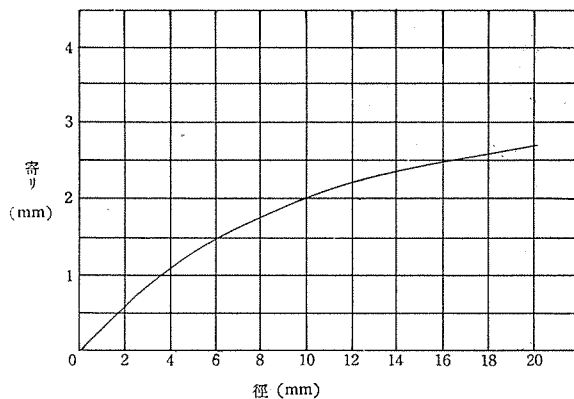
上記三項目の應力は

荷重  $= T \text{ kg}$  鎖の素材径  $= \alpha \text{ mm}$  としたる時の

$$\sigma = \frac{T}{\frac{\pi}{4} \alpha^2 \times 2} \text{ kg/mm}^2 \text{ を言ふのである。}$$

- (4) ホイスト用鎖に於ては、振れがあると品物を空中で振り廻すことになり、特に長い品物を吊した場合に危険であるから、振れは  $150/\text{m}$  以下に我が社に於ては特に規定してゐる。

鎖の素材径と各荷重の関係は第1表の如くである。



第 3 圖

第 1 表

鎖の素材 直径 (mm)	破壊引張試験 荷重 (kg)	牽引試験荷重 (kg)	許容荷重 (kg)
9	2900	1450	650
11	4500	2250	1000
13	6300	3150	1500
16	9500	4750	2500
19	13600	6800	3500

#### 5 鎖の強度計算式

鎖の強さに就て Grashof の式として知られてゐるものを掲ると、第4圖に於て鎖環を一つの楕圓と見做してその短径を  $2a$ 、長径を  $2b$  とし  $R, r$  の二つの圓弧で近似的に畫くと、直角三角形 OEF に於て

$$(R-a)^2 + (b-r)^2 = (R-r)^2$$

$$\text{即ち } -2Rr + 2aR + 2br = a^2 + b^2 \dots\dots\dots (1)$$

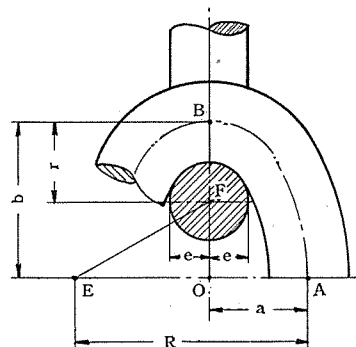
然して  $0 < r < a$  でなければならない。

今兩極端の場合をとつて

$$r=0 \text{ とすると (1) より } R = \frac{a^2 + b^2}{2a}, \text{ 又 } \frac{r}{R} = 0$$

$$r=a \text{ とすると、第4圖より } R = \infty \therefore \frac{r}{R} = 0,$$

故に  $r$  が  $0$  と  $a$  との中間の値で、而も  $\frac{r}{R}$  が最大になるような値の時に最も楕圓に近いことになる。



第 4 圖

$$d\left(\frac{r}{R}\right) = \frac{Rdr - rdR}{R^2} = 0 \text{ とおけば } Rdr - rdR = 0$$

$$\therefore \frac{dR}{dr} = \frac{R}{r} \dots\dots\dots(2)$$

$$\text{又 (1) より } -Rdr - rdR + adR + bdr = 0$$

$$\therefore \frac{dR}{dr} = \frac{R-b}{a-r} \dots\dots\dots(3)$$

$$(2)(3) \text{ より } \frac{R-b}{a-r} = \frac{R}{r} \therefore 2Rr - aR - br = 0 \dots\dots\dots(4)$$

(1)(4) より

$$R = \frac{a^2 + b^2 + (b-a)\sqrt{a^2 + b^2}}{2a} \dots\dots\dots(5)$$

$$r = \frac{a^2 + b^2 - (b-a)\sqrt{a^2 + b^2}}{2b} \dots\dots\dots(6)$$

この  $R$  及  $r$  を以て書いたものが最も楕圓に近いのであるから、次のように作圖をする (第5圖参照)

先づ  $AB$  を結びこの上に  $AP = b - a$  に等しく  $P$  點をとり  $BP$  の垂直二等分線を立てて  $HFE$  とすると、 $E$  及  $F$  をそれぞれ中心とし、 $R$  及  $r$  を半径として書いた近似楕圓が求むる形である。

今鎖の素材径を  $2e$  とすると第4圖により、 $a > 2e$ 、 $b > 3e$  でなければならぬ、然して  $r$  と  $e$  との関係をみると

$e < \frac{1}{2}r$  ならば隣接せる鎖環は第6圖の如く  $D$  點1ヶ所で接觸する故壓縮應力大となり、従つて磨耗も甚しくなり、好しくない。

$e > \frac{1}{2}r$  ならば相隣れる鎖環は第7圖の  $G, K$  の如き點4點で接觸する故同様に好しくない。

$e = \frac{1}{2}r$  ならば相隣れる鎖環は第8圖の圓弧  $G'K'$  の如き線で接觸する故、最も好條件となり、鎖に荷重がかゝつても、鎖環の  $\widehat{G'K'}$  の部分は變形せぬと見做す事が出来る。

因つて鎖環の強さに就ては第9圖の如く  $C$  で固定された  $\widehat{AC}$  の變形について考へればよいから、 $A$  に連續の條件を入れ、 $AC$  を圓弧の曲り梁とみると、任意の斷面 ( $R, \varphi$ ) 上の任意の點に於ける曲げ應力  $\sigma$  は

$$\sigma = \frac{Q}{F} \left\{ \frac{\sin \varphi_1}{\varphi_1(1+\kappa)} + \frac{1}{\kappa} \left( \frac{\eta}{R+\eta} \right) \left( \frac{\sin \varphi_1}{\varphi_1(1+\kappa)} - \cos \varphi \right) \right\} \dots\dots\dots(7)$$

により與へられる、

こゝに於て

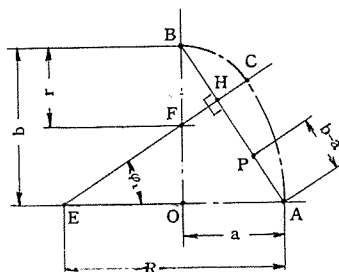
$Q = A$  點に作用する引張り荷重にして、即ち吊してゐる荷重の半分

$F =$  鎖の素材の斷面積にして  $\pi e^2$

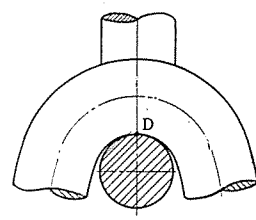
$\kappa =$  斷面に關する係数にして、圓斷面の場合は

$$\frac{1}{4} \left( \frac{e}{R} \right)^2 + \frac{1}{8} \left( \frac{e}{R} \right)^4 + \frac{5}{64} \left( \frac{e}{R} \right)^6 + \dots\dots\dots$$

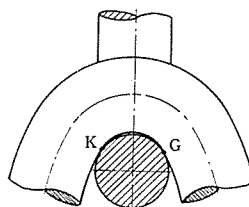
$\eta =$  斷面の中立軸に平行なる直徑から、應力  $\sigma$  の起



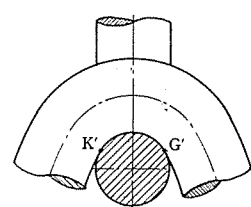
第5圖



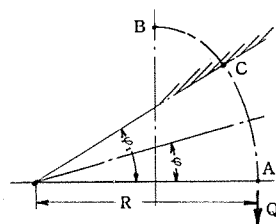
第6圖



第7圖



第8圖



第9圖

つてゐる點までの距離

$$\text{今 } \frac{a}{e} = \alpha, \frac{b}{e} = \beta \text{ とすると } \frac{r}{e} = 2 \text{ なる故}$$

$$(5) \text{ より } \frac{R}{e} = \frac{1}{2\alpha} \left\{ \alpha^2 + \beta^2 + (\beta - \alpha)\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

$$(6) \text{ より } 4\beta = \alpha^2 + \beta^2 - (\beta - \alpha)\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\text{即ち } 8\beta - (4 - \alpha)(\alpha^2 + \beta^2) = 0 \dots\dots\dots(9)$$

錨鎖として JES に規定されてゐる寸法割合より、

$$\alpha = 2.5 \text{ とすると (9) より } \beta = 3.6 \text{ を得、} \frac{r}{e} = 2 \text{ なる故}$$

$$(8) \text{ より } \frac{R}{e} = 4.8 \text{ を得、}$$

$$\text{因つて } \frac{OE}{e} = \frac{R-a}{e} = 4.8 - 2.5 = 2.3$$

$$\frac{OF}{e} = \frac{b-r}{e} = 3.6 - 2 = 1.6$$

$$\varphi_1 = \tan^{-1} \frac{OF}{OE} = \tan^{-1} 0.696 = 34^\circ 50'$$

$$\kappa = \frac{1}{4} \left( \frac{e}{R} \right)^2 + \frac{1}{8} \left( \frac{e}{R} \right)^4 + \frac{5}{64} \left( \frac{e}{R} \right)^6 + \dots\dots\dots = 0.0111$$

以上の値により

$\varphi = 0$  即ち  $A$  點に於ては

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = e \text{ (外側では) } \sigma_1 = -0.171 \frac{Q}{F} \\ \eta = -e \text{ (内側では) } \sigma_2 = 2.608 \frac{Q}{F} \end{array} \right.$$



$\varphi = \varphi_1$  即ち C 點に於ては

$$\begin{cases} \eta = e \text{ (外側では)} \sigma_1 = 2.615 \frac{Q}{F} \\ \eta = -e \text{ (内側では)} \sigma_2 = -1.643 \frac{Q}{F} \end{cases}$$

結局 A 點の内側及び C 點の外側に於て、何れも見掛けの約 2.6 倍に相當する引張り應力が生じてゐることになる。

## 6 鎖のピッチ

荷役機械用鎖としては前述の如く寸法及び強度其他に關して JES に規定されてゐないので、外形寸法割合は錨鎖の中の スタッド 無し普通鎖環に準じてゐる現状であるが、ピッチの公差は特に精密を要するので、電氣ホイスト用鎖は特に素材径 16mm までは  $\pm 0.3\text{mm}$  に定めてゐる。

この公差は鎖に對しては非常に精密なものであり、製作にも困難を伴ふけれども、絶対に必要な條件である。

ピッチの不均一なる鎖を使用するときは、鎖環の彎曲部に條痕を生じ、或は鎖車の溝に喰ひ込みて衝撃、騒音等の原因となり、或は鎖案内を破壊して鎖車に乗り上げ鎖は鎖車より逸脱して、荷物が滑り落ち、又乗り上げると同時に鎖環は極度に曲げ作用を受けて切斷、落下等の原因となるのである。

凡そ荷役機械に於ては衝撃は最も避くべきものであり又騒音も一般機械同様出来る限り防止しなければならない。勿論荷物の落下等は絶対にあり得べからざることであるから、鎖のピッチは充分均一のものを作用しなければならない。

## 7 鎖車

鎖に對してピッチの均一を要求すると同時に、鎖と咬し合ふ鎖車に就いて考へねばならない。鎖車のピッチ圓徑は一般に次の式により求められる。(第 10 圖参照)

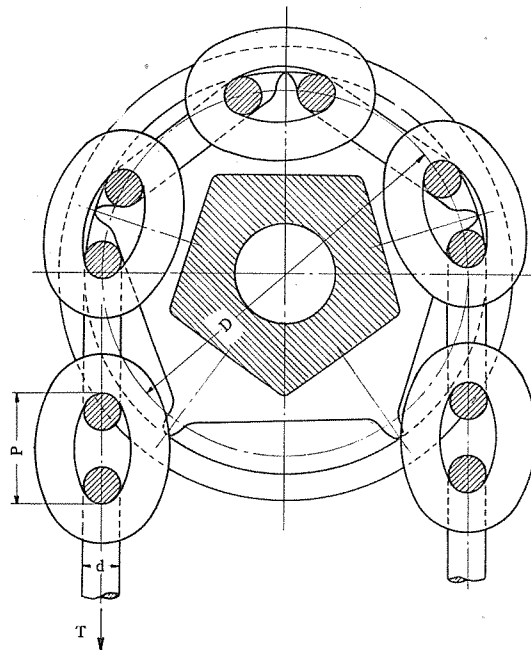
$$D = \sqrt{\left(\frac{p}{\sin \frac{90^\circ}{n}}\right)^2 + \left(\frac{d}{\cos \frac{90^\circ}{n}}\right)^2}$$

こゝに於て  $D$  = 鎖車のピッチ、圓徑、 $p$  = 鎖のピッチ  
 $d$  = 鎖の素材径、 $n$  = 溝數

鎖車の溝のピッチを充分均一にしておく必要のあることは鎖のピッチに對する場合と同様である。曲面の連續よりなつてゐるこの溝を機械加工することは、極めて困難を伴ふ故普通鑄造である。従つて原型(模型)の製作に當つては充分入念にし、且つ鑄造の際は鑄肌が滑らかなるように特別注意を拂はねばならない。

鎖が溝に嵌つた場合、兩者の間隙は成るべく多い方がよい。但しこの間隙の多いことは必ずしも鎖のピッチの不同を吸収し得るものではない。

即ち溝數の多い鎖車に於て、先づピッチの小なる鎖環が混じり、次で數鎖環の中にピッチの大なる鎖環が混入



第 10 圖 鎖車

してゐる場合はこれ等兩者の不同を補つてくれる。然し電氣ホイストに用ふる様な溝數の少い鎖車、即ち溝數が 4~6 と云ふ極端に少いものに於ては、相隣れる 2~4 鎖環の中でピッチの短長が相殺されてゐる場合の外は補つてくれない。又ピッチの大なる鎖環が先に混じつてゐる時は、鎖車の溝數の多少に拘らず咬合は不圓滑となり、間隙の多いことはその用をなさないのである。

故に鎖と鎖車の溝との間隙が多いからとて鎖のピッチの不同は許されないのである。

鎖車に使用する材料は鑄鐵、又は可鍛鑄鐵にして、交番曲げ作用と、捩り作用とを受けるから安全率は相當大にとらなければならぬ。鑄鋼は鑄肌が粗になり易いからあまり好しくないのである。

## 8 結 言

錨鎖或は一般連結用としての鎖は我國に於ても可成り古くから發達しており、製作方法も一九世紀までは鍛接が全盛であつたが、廿世紀になるに及び電氣熔接が次第に普及して來た。

電氣抵抗熔接法は考案されて未だ六十餘年にしかならないが、最近殊に著しき發達を遂げ、次第に鍛接と置き代へられるようになって來た。然し大きな斷面を有するものには鍛接もその長所は決して無視出来ないもので、依然として行はれてゐる。

又荷役機械用鎖の我國に於ける歴史は比較的淺く、特に電氣ホイスト用鎖には寸法精度の高いものが要求せられるのであつて、鎖を使用する電氣ホイストの性能向上は一に製鎖技術の進歩發達に俟つ處大なりと信ずる次第である。